

Über Zusammenhänge
zwischen Rückversicherung und
Gewinnausschüttung in der Lebensversicherung

INAUGURALDISSERTATION
zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von
RENÉ BENEŠ
aus Schaffhausen

Verlag P. G. Keller Winterthur 1957

Über Zusammenhänge
zwischen Rückversicherung und
Gewinnausschüttung in der Lebensversicherung

INAUGURALDISSERTATION
zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von
RENÉ BENEŠ
aus Schaffhausen



Verlag P. G. Keller Winterthur 1957

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der

Herren Prof. Dr. *E. Zwinggi* und Dr. *M. Gürtler*

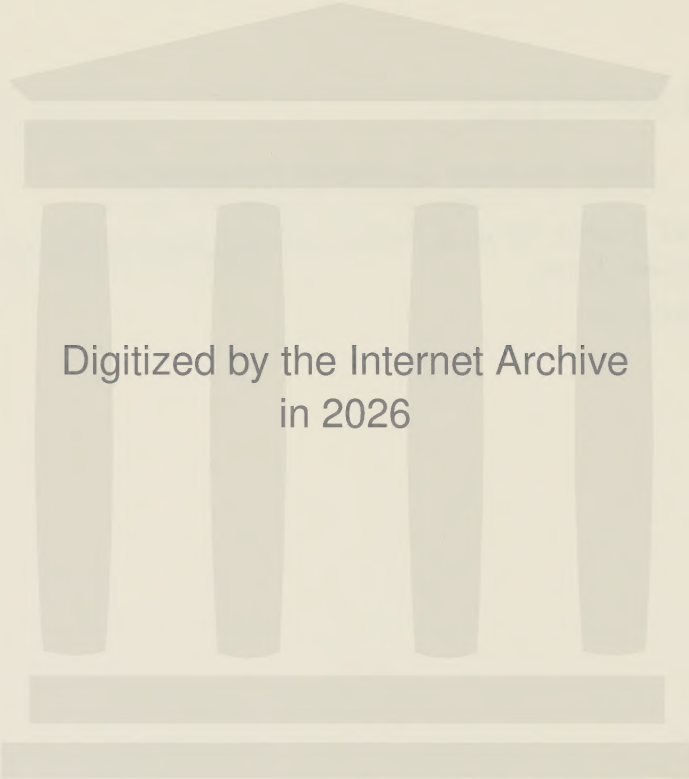
Basel, den 29. Mai 1956

E. Wenk, Dekan

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. ERNST ZWINGGI

danke ich herzlich für seine Anleitungen und sein Interesse an der vorliegenden Arbeit.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INHALT

Einleitung	7
----------------------	---

I. TEIL

Die Einflüsse von säkularer Sterblichkeitsänderung und Rückversicherungsabgabe auf die Erfolgsrechnung des Erstversicherers

1. Kapitel: Sterblichkeitsgewinne	9
§ 1 Generationensterblichkeit	10
§ 2 Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers	11
§ 3 Sterblichkeitsgewinn des Rückversicherers	14
§ 4 Numerische Auswertungen	14
2. Kapitel: Lebensrückversicherung	17
§ 1 Quotenrückversicherung	17
§ 2 Excedentenrückversicherung	18
§ 3 Quotenexcedentenrückversicherung	19
3. Kapitel: Die Bestimmungsgleichung der Dividendenanpassung . .	19
§ 1 Die Erfolgsrechnung des Erstversicherers bei teilweise rückversicherter Summe	20
§ 2 Anpassung der Gewinnanteile	22
§ 3 Erfolgsrechnung und Dividendenanpassung, wenn die Tarifgrundlagen mit dem tatsächlichen Ablauf überein- stimmen	24
§ 4 Numerische Untersuchungen	25

II. TEIL

Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die Berechnung der Rückversicherungsprämie

1. Kapitel: Feste Rückversicherungsprämie	34
§ 1 Minimumbedingung	35

§ 2 Maximumbedingung.	36
§ 3 Das Intervall der festen Rückversicherungsprämie . . .	37
2. Kapitel: Näherungsweise Erfassung der säkularen Sterblichkeits- abnahme in der Rückversicherungsprämie	40
3. Kapitel: Numerische Auswertungen	43

III. TEIL

Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten

1. Kapitel: Extrapolationsverfahren	47
2. Kapitel: Anwendung des Verfahrens auf schweizerisches Zahlen- material	49
§ 1 Lineare Abhängigkeit von $\log q_{xi}(t_k)$	49
§ 2 Bestimmung der Extrapolationsgeraden	50
§ 3 Aufbau der Generationensterbetafeln	52
§ 4 Die $\Delta\tau$ -Verschiebung	57
Zusammenfassung	60
Literaturverzeichnis	61

EINLEITUNG

Bei der Anwendung mechanischer Gewinnpläne, worin die Gewinnanteile formal als versicherte Leistungen¹⁾ auftreten, benützt der Versicherer zur Bestimmung der Tarifprämie Grundlagen II. Ordnung. Über den Ablauf der Ereignisse werden daher Voraussetzungen getroffen, die der Wirklichkeit nahe kommen. Wird volle Übereinstimmung zwischen Rechnungsgrundlagen und Verlauf angenommen, dann bildet sich die Gewinn- und Verlustrechnung im Barwert als Äquivalenzgleichung der Tarifprämie ab.

Die Rückversicherung hingegen erfolgt im allgemeinen zu einer Prämie, welcher in bezug auf die Sterblichkeit vorsichtig gewählte Annahmen zu Grunde gelegt sind. Aus der Spanne zwischen den Sterbewahrscheinlichkeiten I. und II. Ordnung erzielt der Rückversicherer einen Sterblichkeitsgewinn. Jede Rückversicherungsabgabe belastet daher die Erfolgsrechnung des Erstversicherers mit einem Verlust.

Die säkulare Sterblichkeitsabnahme hat nun aber zur Folge, dass die tatsächliche Sterblichkeit auch vom rechnungsmässigen Schaden ausmass II. Ordnung abweicht. Diese Abweichung bedeutet für den Erstversicherer einen Gewinn, welcher gleichzeitig und zusätzlich auch beim Rückversicherer in Erscheinung tritt. Auf die gleiche Summe bezogen, wird deshalb der Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers kleiner sein als derjenige des Rückversicherers. Daraus wird augenscheinlich, dass man sich eine Summe stets in einem Verhältnis rückversichert denken kann, dass die Erfolgsrechnung des Erstversicherers entweder einen Gewinn aufweist oder einen Verlust. Diese Störung des Äquivalenzprinzips soll im I. Teil der vorliegenden Arbeit untersucht und gemessen werden.

Die Messungen zeigen, dass für die praktisch zur Anwendung

¹⁾ E. Zwinggi: Versicherungsmathematik S.119, Basel 1945.

gelangenden Rechnungsgrundlagen Rückversicherungsabgaben zwischen 30 und 50 % bereits zu absoluten Verlusten führen. Es erhebt sich daher die Frage nach einer Rückversicherungsprämie mit der Eigenschaft, den Beteiligten wenigstens keinen Verlust zu erbringen. Im II. Teil wird ein Intervall konstruiert, das diejenige Rückversicherungsprämie enthält, welche – unabhängig vom Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe – stets der erwähnten Forderung genügt.

Beide Aufgaben verlangen nun aber die Kenntnis der tatsächlichen Sterblichkeit. Mathematisch läuft dieses Problem auf eine Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten hinaus. Mit Hilfe einer neueren Methode¹⁾ wird im III. Teil aus schweizerischem Zahlenmaterial ein System von Generationensterbetafeln aufgebaut, welches als Modell für den zeitlichen Ablauf der Sterblichkeit verwendet wird.

¹⁾ Rueff: Ableitung von Sterbetafeln für die Rentenversicherung und sonstige Versicherungen mit Erlebensfallcharakter, Konrad Triltsch-Verlag, Würzburg 1955.

I. TEIL

Die Einflüsse von säkularer Sterblichkeitsänderung und Rückversicherungsabgabe auf die Erfolgsrechnung des Erstversicherers.

Nachdem die zur Anwendung gelangenden Rechnungsgrundlagen festgelegt und Annahmen über den tatsächlichen Ablauf der Sterblichkeit getroffen sind, hängt die Erfolgsrechnung des Erstversicherers – wie eingangs erwähnt – vom Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe ab. Findet keine Rückversicherung statt, dann beruht der Sterblichkeitsgewinn auf der Spanne zwischen den Grundlagen II. Ordnung der Tarifprämie und dem wirklichen Verlauf der Ereignisse. Andererseits bestimmt die Verschiedenheit von Tarif- und Rückversicherungsgrundlagen im wesentlichen die Höhe des Verlustes bei vollständiger Rückdeckung. Damit sind in groben Zügen das Definitionsintervall, sowie die Funktionswerte in den Extremstellen skizziert.

Wir werden nunmehr die Erfolgsrechnung des Erstversicherers bei teilweise rückversicherter Summe aufbauen. Die dabei in Erscheinung tretenden Gewinne oder Verluste werden sodann zum Gegenstand einer Erhöhung oder Reduktion der Gewinnanteile gemacht. Diese Dividendenanpassung verfolgt einzig den Zweck, die Einflüsse von säkularer Sterblichkeitsänderung und Rückversicherungsabgabe anschaulich messen zu können.

ERSTES KAPITEL

Sterblichkeitsgewinne

Im Rahmen der gestellten Aufgabe ist es zweckmässig, Abweichungen nur im Verlauf der Sterblichkeit anzunehmen, während die Voraussetzungen über Zinsfuss und Verwaltungskosten der Wirklich-

keit entsprechen sollen. Wenn wir unsere Betrachtungen auf die gewöhnliche gemischte Versicherung auf ein Leben mit Gewinnbeteiligung und jährlicher Prämienzahlung beschränken, darf angenommen werden, dass die effektive Sterblichkeit stets geringer sein wird als die in Tarif- und Rückversicherungsprämie verwendeten Annahmen. Sowohl in der Erfolgsrechnung des Erstversicherers wie auch in derjenigen des Rückversicherers erscheinen daher Sterblichkeitsgewinne.

§ 1 Generationensterblichkeit

Zur Berechnung der Prämien werden im allgemeinen Periodensterbetafeln benützt, deren Sterbewahrscheinlichkeiten streng genommen nur für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa das Mitteljahr der Beobachtungsperiode, zutreffend waren. Sobald jedoch angenommen werden kann, dass mit fortschreitender Zeit eine Verbesserung der Sterblichkeit einhergeht, werden sich im Laufe einer Versicherungsdauer die wirklichen Häufigkeiten

$$\frac{L_{x+k} - L_{x+k+1}}{L_{x+k}}$$

immer mehr von den rechnungsmässigen Wahrscheinlichkeiten

$$q_{x+k}(t_i) = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+k}}$$

entfernen. Soll demnach der tatsächliche Ablauf der Sterblichkeit wiedergegeben werden, so wird an Stelle von $q_{x+k}(t_i)$, wo t_i das Mitteljahr der i -ten Periodensterbetafel bedeutet, die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit des $x+k$ -jährigen im Zeitpunkt $x+\tau+k$ (τ = Geburtsjahr) treten müssen. Die nach einem bestimmten τ zusammengefassten

$$q_{x+k}(x+\tau+k) = \frac{l_{x+k}(x+\tau+k) - l_{x+k+1}(x+\tau+k+1)}{l_{x+k}(x+\tau+k)}$$

repräsentieren das Absterben der in τ geborenen Generation und bilden eine Generationensterbetafel. Über die Rekursionsformel

$$l_{x+1}(x+\tau+1) = l_x(x+\tau) \cdot [1 - q_x(x+\tau)]$$

erhalten wir mit $x=0,1,\dots,\omega$ die Überlebensordnung der Generation $l_0(\tau)$. Daraus folgen unmittelbar das System der Kommuntationszahlen

$$\begin{aligned} D_{x+k}(x+\tau+k) &= v^{x+k} \cdot l_{x+k}(x+\tau+k), \\ N_x(x+\tau) &= \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}(x+\tau+k), \\ S_x(x+\tau) &= \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}(x+\tau+k) \end{aligned}$$

und weiter der vom Geburtsjahr τ abhängige Rentenbarwert

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) = \frac{N_x(x+\tau) - N_{x+n}(x+\tau+n)}{D_x(x+\tau)},$$

wie auch die Einmalprämie der Gemischten Versicherung

$$A_{x:\overline{n}}(\tau) = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau).$$

§ 2 Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers

Der Erstversicherer nimmt die Tarifprämie

$$\Pi_{x:\overline{n}} = P_{x:\overline{n}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} + \beta \Pi_{x:\overline{n}} + \gamma + \frac{\Omega_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \quad (1)$$

ein, worin $P_{x:\overline{n}}$ die Nettoprämie, α die Abschlusskosten, β und γ die zur Prämie und zur Summe proportionalen Verwaltungskosten bedeuten, während $\Omega_{x:\overline{n}}$ den Barwert der Gewinnanteile wiedergibt. Der Gewinnplan sei zerlegt in

$$\Omega_{x:\overline{n}} = \Pi_{x:\overline{n}} \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(1)} + \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}, \quad (2)$$

wo

$$\Pi_{x:\overline{n}} \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(1)} = (1 - \beta) \frac{k \cdot \Pi_{x:\overline{n}}}{D_x} \sum_{t=t_1}^{n-1} (t - t_1 + 1) \cdot D_{x+t} \quad (3)$$

die im Versicherungsjahr t_1 erstmals in der Höhe k und dann jährlich um ein weiteres k steigende Dividende darstellt, vermindert um die darauf entfallenden Verwaltungskosten. Das zweite Glied zeigt im

Barwert die Bildung einer zusätzlichen prämienfreien, gemischten Versicherung

$$\omega_{x:\overline{n}|}^{(2)} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=t_1}^{n-1} D_{x+t} \cdot K_t \cdot A_{x+t:\overline{n-t}|}. \quad (4)$$

Ausserdem sind der Tarifprämie die Zinsrate i und die Wahrscheinlichkeiten $q_{x+k}(T)$ aus einer Periodensterbetafel mit dem Mitteljahr T zugrunde gelegt.

Den Übergang zur Erfolgsrechnung finden wir nunmehr in der Einführung der „wahren“ Werte $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)$, $A_{x:\overline{n}|}(\tau)$, $\omega_{x:\overline{n}|}^{(1)}(\tau)$ und $\omega_{x:\overline{n}|}^{(2)}(\tau)$:

A. Einnahmen:

$$\Pi_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau) \quad \text{Barwert der Prämieinnahme}$$

B. Ausgaben:

$$A_{x:\overline{n}|}(\tau) \quad \text{Barwert der Versicherungsleistungen}$$

$$\alpha \quad \text{Abschlusskosten}$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta \cdot \Pi_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau) \\ \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau) \end{array} \right\} \quad \text{Barwert der Verwaltungskosten}$$

$$\Pi_{x:\overline{n}|} \cdot \omega_{x:\overline{n}|}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}|}^{(2)}(\tau) \quad \text{Barwert der Gewinnanteile}$$

$$G \quad \text{Saldo = Sterblichkeitsgewinn}$$

Auf der Einnahmenseite wird $\Pi_{x:\overline{n}|}$ durch die Äquivalenzgleichung (1) ersetzt, worin ausserdem an Stelle der Nettoprämie der Ausdruck $\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$ tritt; in den Ausgaben verwenden wir die Beziehung $A_{x:\overline{n}|}(\tau) = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)$ und kürzen

$$\Pi_{x:\overline{n}|} \cdot \omega_{x:\overline{n}|}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}|}^{(2)}(\tau) \quad (5)$$

durch das Symbol $\bar{\Omega}_{x:\overline{n}|}(\tau)$ ab¹⁾. Wenn wir die Einnahmen als positive

¹⁾ Es ist zu unterscheiden zwischen $\Omega_{x:\overline{n}|}(\tau) = \Pi_{x:\overline{n}|}(\tau) \cdot \omega_{x:\overline{n}|}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}|}^{(2)}(\tau)$, dem Gewinnplan der minimalen Tarifprämie und $\bar{\Omega}_{x:\overline{n}|}(\tau) = \Pi_{x:\overline{n}|} \cdot \omega_{x:\overline{n}|}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}|}^{(2)}(\tau)$, dem Barwert der tatsächlich ausgeschütteten Gewinne auf Grund der Tarifprämie $\Pi_{x:\overline{n}|}$.

und die Ausgaben als negative Grössen auffassen, erhalten wir als Sterblichkeitsgewinn

$$G = (1 + \alpha) \left[\frac{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}} - 1 \right] - \left[\overline{\Omega}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) - \frac{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}} \Omega_{\mathbf{x}:\overline{n}} \right]. \quad (6)$$

Die Deutung dieser Gleichung ist einfach:

$$\frac{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}} - 1 = P_{\mathbf{x}:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) - A_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) \quad (6a)$$

Nettosterblichkeitsgewinn.

$$\alpha \left[\frac{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}} - 1 \right] = \left[\frac{\alpha}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) \quad (6b)$$

Sterblichkeitsgewinn auf der Tilgungsquote von α .

$$\overline{\Omega}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) - \frac{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}} \Omega_{\mathbf{x}:\overline{n}} \quad (6c)$$

Sterblichkeitsverlust, der infolge des Rentencharakters der Gewinnausschüttung zustande kommt.

Die Kenntnis der tatsächlichen Sterblichkeit gestattet es, eine Tarifprämie zu konstruieren, deren Äquivalenzgleichung mit dem Barwert der Erfolgsrechnung genau übereinstimmen würde. Wenn nun der Ansatz dieser „minimalen“ Tarifprämie

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) = & A_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) + \alpha + \beta \cdot \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) + \\ & + \gamma \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) + \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) \cdot \omega_{\mathbf{x}:\overline{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{\mathbf{x}:\overline{n}}^{(2)}(\tau) \end{aligned} \quad (7)$$

eingeführt und vom Schema der Gewinn- und Verlustrechnung

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) = & A_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) + \alpha + \beta \cdot \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) + \\ & + \gamma \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau) + \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}} \cdot \omega_{\mathbf{x}:\overline{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{\mathbf{x}:\overline{n}}^{(2)}(\tau) + G \end{aligned} \quad (8)$$

subtrahiert wird, erscheint der Sterblichkeitsgewinn in etwas veränderter Form:

$$G = [\Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}} - \Pi_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)] \cdot \left[1 - \beta - \frac{\omega_{\mathbf{x}:\overline{n}}^{(1)}(\tau)}{\ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \ddot{a}_{\mathbf{x}:\overline{n}}(\tau). \quad (9)$$

Diese Darstellung von G eignet sich kaum zur numerischen Auswertung, wird jedoch in einem anderen Zusammenhang noch Verwendung finden.

§ 3 Sterblichkeitsgewinn des Rückversicherers

Dem Rückversicherer wird eine ausreichende Prämie

$$P'_{x:\overline{n}} = P'_{x:\overline{n}} + \frac{\alpha'}{d'_{x:\overline{n}}} + \gamma' \quad (10)$$

gutgeschrieben. Sie enthält die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x+k}(t)$, einen rechnungsmässigen Zinsfuss i' , eine Abschlussprovision α' und Verwaltungskosten γ' . Die veränderte Bezeichnungsweise deutet an, dass diese Rechnungsgrundlagen keineswegs mit denjenigen des Erstversicherers übereinzustimmen brauchen.

Aus dem Schema der Gewinn- und Verlustrechnung

$$P'_{x:\overline{n}} \cdot d'_{x:\overline{n}}(\tau) = A'_{x:\overline{n}}(\tau) + \alpha' + \gamma' \cdot d'_{x:\overline{n}}(\tau) + G' \quad (11)$$

erreichen wir auf dem gleichen Weg, der zum Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers geführt hat, denjenigen des Rückversicherers

$$G' = \left[\frac{d'_{x:\overline{n}}(\tau)}{d'_{x:\overline{n}}} - 1 \right] (1 + \alpha') \quad (12)$$

und ebenso die zweite Form

$$G' = [P'_{x:\overline{n}} - P'_{x:\overline{n}}(\tau)] d'_{x:\overline{n}}(\tau), \quad (13)$$

wo ganz analog wie im Falle der Tarifprämie in

$$P'_{x:\overline{n}}(\tau) = P'_{x:\overline{n}}(\tau) + \frac{\alpha'}{d'_{x:\overline{n}}(\tau)} + \gamma' \quad (14)$$

die „minimale“ Rückversicherungsprämie zu erkennen ist.

§ 4 Numerische Auswertungen

Zahlenmässige Untersuchungen an den soeben abgeleiteten Ausdrücken für die Sterblichkeitsgewinne verlangen nunmehr die Kenntnis des wirklichen Ablaufs der Sterblichkeit. Im letzten Teil der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe der bereits erwähnten Methode von Rueff die Sterbewahrscheinlichkeiten aus schweizerischem Zahlenmaterial extrapoliert und zu einem System von Generationensterbetafeln zusammengezogen. Für dieses System, welches wir im fol-

genden mit $SM(\tau)$ bezeichnen wollen, soll postuliert werden, dass darin das tatsächliche Absterben der Generationen wiedergegeben sei.

Tabelle 1 zeigt zunächst für einige Kombinationen den Sterblichkeitsgewinn G des Erstversicherers, aufgeteilt nach

- (6a) Nettosterblichkeitsgewinn,
- (6b) Sterblichkeitsgewinn auf der Tilgungsquote der Abschlusskosten,
- (6c) Sterblichkeitsverlust an der Gewinnausschüttung.

Als Vergleich sind sodann die Sterblichkeitsgewinne des Rückversicherers G' (12) bei der Verwendung verschiedener Sterbetafeln aufgeführt.

Vergleich der Sterblichkeitsgewinne in ‰ der Summe

Erstversicherer		Rückversicherer					
x	n	Sterbetafel			Sterbetafel n		
		SM 39/44, 3%			SM 21/30, 2½% SM 33/37, 2½% SM 39/44, 2½%		
		(6a)	(6b)	(6c)	G = (6a) + (6b) + (6c)	G'	G'
30	25	15,79	0,79	— 1,47	15,11	37,26	28,01
30	35	28,29	1,41	— 3,85	25,85	63,28	48,45
40	15	11,43	0,57	— 0,65	11,35	29,79	21,20
40	25	25,30	1,27	— 2,51	24,06	61,12	44,88
50	10	10,44	0,52	— 0,40	10,56	29,36	20,73
50	20	28,18	1,41	— 2,33	27,26	69,98	51,40
							16,94
							30,93
							12,13
							27,24
							10,88
							30,00

Tarifgrundlagen

	Ablauf		Rückversicherungsgrundlagen		Ablauf	
	SM 39/44	SM (τ)	SM 21/30; 33/37; 39/44	SM (τ)	SM (τ)	SM (τ)
Sterblichkeit		do.			do.	do.
Zinsfuß	i = 0,03	do.	i' = 0,025		do.	do.
Abschlusskosten	α = 0,05	do.	α' = 0,04			
β-Verwaltungskosten	β = 0,03	do.				
γ-Verwaltungskosten	γ = 0,002	do.				
Gewinnplan	Erstmals zu Beginn des 3. Jahres 2% von π und sodann jährlich um weitere 2% steigend					
		x + τ = 1956				x + τ = 1956

ZWEITES KAPITEL
Lebensrückversicherung

Bis jetzt haben wir die Sterblichkeitsgewinne des Erstversicherers unabhängig von denjenigen des Rückversicherers betrachtet, um einen Vergleich zu ermöglichen. Die numerischen Auswertungen bestätigten, dass unter den für die Praxis geltenden Voraussetzungen für gleiche Summen stets

$$G' > G$$

ist.

Wird die Rückversicherung als Betriebsmassnahme des Erstversicherers aufgefasst, so kann der Sterblichkeitsgewinn des Rückversicherers als zusätzliche Kostenkomponente interpretiert werden. Diese bezieht sich auf die in Rückdeckung abgegebene Teilsumme, während der eigene Sterblichkeitsgewinn auf der ganzen Versicherungssumme entlastend in die Erfolgsrechnung eingeht. Diese Betrachtungsweise lässt sofort erkennen, dass es nunmehr allein auf das Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe ankommt, ob äquivalente Deckung besteht oder nicht. Die Grenzen, innerhalb derer jener Quotient liegen kann, hängen von der Formulierung des Rückversicherungsvertrages ab, wobei es in diesem Zusammenhang völlig belanglos ist, welche Motive zu dieser oder jener Rückversicherungsart geführt haben.

§ 1 Quotenrückversicherung

Der Erstversicherer zediert eine Quote, einen einheitlichen Bruchteil b von allen Versicherungen. Jede Summe S zerlegt sich dann in einen Selbstbehalt

$$s_1 = S - b \cdot S$$

und in einen rückversicherten Teil

$$s_2 = b \cdot S,$$

sodass das gesuchte Verhältnis

$$\frac{s_2}{s_1} = b \tag{15}$$

als Konstante auftritt.

§ 2 Excedentenrückversicherung

Angenommen, der Selbstbehalt s_1 sei auf Grund einer Maximaltabelle festgelegt. In der Folge umfasst die Excedentenrückversicherung den über s_1 hinausgehenden, jedoch höchstens das M -fache von s_1 erreichenden Teil s_2 . Die rückversicherte Summe liegt daher zwischen

$$0 \leq s_2 \leq M \cdot s_1. \quad (16)$$

Grundsätzlich ist jede beliebig grosse Versicherungssumme denkbar; wir wollen aber nur jene Summen betrachten, welche nicht ungedeckt über die hier beschriebene Excedentenrückversicherung hinausragen. Jene müssten Gegenstand eines weiteren Excedenten oder irgendeiner Einzelrückversicherung sein. Damit legen wir eine obere Schranke für S fest:

$$S = s_1 + s_2 \leq s_1 (M + 1). \quad (17)$$

Bezeichnen wir mit m die Anzahl der auf Grund einer bestimmten Versicherungssumme S und eines vorgegebenen Selbstbehaltes s_1 rückversicherten Maxima

$$m = \frac{S - s_1}{s_1} \leq M,$$

so gelten innerhalb der durch (16) und (17) gezogenen Grenzen die Gleichungen

$$\begin{aligned} s_2 &= m \cdot s_1, \\ S &= (m + 1) s_1. \end{aligned}$$

Der zu ermittelnde Quotient

$$\frac{s_2}{S} = \frac{m}{m + 1}, \quad (0 \leq m \leq M)$$

ist auf seinem Definitionsintervall eigentlich monoton steigend nimmt daher im Anfangspunkt seinen kleinsten und im Endpunkt seinen grössten Wert an, sodass er stets im abgeschlossenen Intervall

$$0 \leq \frac{s_2}{S} = \frac{m}{m + 1} \leq \frac{M}{M + 1}$$

liegt.

§ 3 Quotenexcedentenrückversicherung

Eine Quote b geht *vornweg* in Rückdeckung, während der Rest zum Gegenstand einer Excedentenrückversicherung wird:

$$s_2 = b \cdot S + m \cdot s_1, (m \leq M).$$

Wird einmal mit $S = s_1 + s_2$ und dann mit $s_2 = S - s_1$ in diesen Ansatz eingegangen, so folgen sofort die Ausdrücke

$$s_2 = s_1 \frac{m + b}{1 - b} \leq s_1 \frac{M + b}{1 - b},$$

$$S = s_1 \frac{m + 1}{1 - b} \leq s_1 \frac{M + 1}{1 - b}$$

und in gleicher Weise wie im vorangehenden Abschnitt

$$\frac{s_2}{S} = \frac{m + b}{m + 1}, \quad (19)$$

womit auch für diese Rückversicherungsart die Grenzen

$$b \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{M + b}{M + 1} \quad (20)$$

fixiert sind.

DRITTES KAPITEL

Die Bestimmungsgleichung der Dividendenanpassung

Die Gewinn- und Verlustrechnung des Erstversicherers wird nun für den Fall aufgebaut, dass die Versicherungssumme teilweise in Rückdeckung abgegeben ist. Ihr Saldo besteht dann aus dem Sterblichkeitsgewinn auf der ganzen Summe, vermindert um die auf den rückversicherten Teil entfallenden Rückversicherungskosten¹⁾. Dieser vom Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe abhängige Saldo soll im folgenden gemessen werden. Je nachdem, ob er positiv oder negativ ausfällt, wird er zum Gegenstand einer Erhöhung oder Reduktion der Gewinnanteile gemacht, unbekümmert darum, ob praktisch eine Anpassung durchgeführt würde oder nicht.

¹⁾ Die Rückversicherungskosten umfassen in diesem Zusammenhang den Sterblichkeitsgewinn G' des Rückversicherers, sowie die dem Erstversicherer erwachsenden Mehrauslagen an Verwaltungskosten.

§ 1 Die Erfolgsrechnung des Erstversicherers bei teilweise rückversicherter Summe

Der bisherigen Bezeichnungsweise folgend, sei s_2 die rückversicherte Teilsumme von S , $\Pi_{x:\overline{n}}$ die auf S entfallende Tarifprämie (1) und $P'_{x:\overline{n}}{}^a$ die dem Rückversicherer vergütete Prämie (10). Neu in die Rechnung tritt die Kostenkomponente $\gamma^{(R)}$ welche die dem Erstversicherer erwachsenden Verwaltungskosten für die Rückversicherungsabgabe erfassen soll. Wird weiterhin vorausgesetzt, der tatsächliche Ablauf der Sterblichkeit sei durch $SM(\tau)$ repräsentiert, dann nimmt die Erfolgsrechnung des Erstversicherers im Barwert folgende Gestalt an:

A. Einnahmen:

$S \cdot \Pi_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der Prämieinnahme
$s_2 \cdot \alpha'$	Vom Rückversicherer vorgeschossene Abschlusskosten
$s_2 \cdot A'_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der Rückversicherungsleistungen

B. Ausgaben:

$S \cdot A_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der Erstversicherungsleistungen
$S \cdot \alpha$	Abschlusskosten
$S \cdot \beta \cdot \Pi_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der zur Prämie proportionalen Verwaltungskosten
$s_1 \cdot \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der auf den Selbstbehalt entfallenden Verwaltungskosten
$S [\Pi_{x:\overline{n}} \omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau)]$	Barwert der ausbezahlten Gewinnanteile
$s_2 \cdot \gamma^{(R)} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der auf die Rückversicherungssumme entfallenden Verwaltungskosten
$s_2 \cdot P'_{x:\overline{n}}{}^a \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)$	Barwert der zedierten Rückversicherungsprämien
$S \cdot Q_{x:\overline{n}}(s_2, S)$	Saldo

Es sei noch hervorgehoben, dass sich die Barwerte $\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)$ und $\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)$ wie auch $A_{x:\overline{n}}(\tau)$ und $A'_{x:\overline{n}}(\tau)$ nur im Rechnungszinsfuss voneinander unterscheiden.

Der Saldo $S \cdot Q_{x:\overline{n}|}(s_2, S)$ lässt sich in eine übersichtliche Form bringen, wenn zunächst $\Pi_{x:\overline{n}|}$ auf der Einnahmenseite und $P'_{x:\overline{n}|}$ durch ihre Äquivalenzgleichungen ersetzt werden. Nach der ersten Umformung wird noch von folgenden bekannten Beziehungen Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d, \\ P'_{x:\overline{n}|} &= \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - d', \\ A_{x:\overline{n}|}(\tau) &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau) \\ \text{und} \quad A'_{x:\overline{n}|}(\tau) &= 1 - d' \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(\tau). \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen ermöglicht die leicht zu deutende Gliederung

$$\begin{aligned} S \cdot Q_{x:\overline{n}|}(s_2, S) &= \\ S \cdot (1 + \alpha) \left[\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - 1 \right] - \\ - S \left[\overline{\Omega}_{x:\overline{n}|}(\tau) - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \Omega_{x:\overline{n}|} \right] - \\ - s_2 \cdot (1 + \alpha') \left[\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - 1 \right] - \\ - s_2 \left[\gamma^{(R)} + \frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)} \gamma' - \gamma \right] \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau), \end{aligned} \quad (21)$$

worin der Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers (6) und derjenige des Rückversicherers (12) unmittelbar zu erkennen sind. Der dabei verbleibende Ausdruck setzt sich zusammen aus den angefallenen Rückversicherungskosten

$$s_2 \cdot \gamma^{(R)} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)$$

und den im Rahmen der Rückversicherungsprämie vergüteten Kosten

$$s_2 \cdot \gamma' \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(\tau),$$

vermindert um den nicht verbrauchten, jedoch in der Tarifprämie enthaltenen Teil

$$s_2 \cdot \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau).$$

Dieses Glied hat somit die Bedeutung einer Kostenkomponente, die wir im folgenden mit

$$s_2 \cdot \kappa_{x:\overline{n}|}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\tau)$$

bezeichnen und als Rückversicherungsmehrkosten interpretieren möchten.

Mit diesen Abkürzungen folgt für den Ausdruck (21) die einfache Gleichung

$$Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) = G - \frac{s_2}{S} [G' + \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)]. \quad (22)$$

Gleichzeitig ist auch der Nachweis seiner Abhängigkeit vom Quotienten $s_2 : S$ erbracht. – Wird angenommen, dass $\kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \geq 0$ ist, dann kann mit Hilfe des Zwischenwertsatzes (wegen $G' > G$) leicht bewiesen werden, dass der Saldo $Q_{x:\overline{n}}(s_2, S)$ für ein bestimmtes $s_2 : S$ verschwindet:

$$\frac{s_2}{S} = \frac{G}{G' + \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}. \quad (23)$$

Vom Standpunkt des Erstversicherers aus gesehen, handelt es sich hierbei um die Grenzlage, dass ihm aus der Rückversicherungsabgabe gerade kein absoluter Verlust entsteht.

§ 2 Anpassung der Gewinnanteile

Die Anpassung der Gewinnanteile soll dem Erstversicherer ein rechnerisches Mass liefern, um die Einflüsse von säkularer Sterblichkeitsänderung und Rückversicherungsabgabe auf seine Erfolgsrechnung beurteilen zu können.

Ersetzt man die tatsächlich vorzunehmende Gewinnausschüttung

$$\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) = \Pi_{x:\overline{n}} \omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau)$$

durch einen neuen (theoretischen) Gewinnplan

$$\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}^*(\tau) = \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) + Q_{x:\overline{n}}^1, \quad (24)$$

dann weist die Gewinn- und Verlustrechnung zwangsläufig keinen Saldo mehr auf, d. h. sie geht in eine von $s_2 : S$ abhängige Äquivalenzgleichung über.

¹⁾ Die Abhängigkeit $Q_{x:\overline{n}}(s_2, S)$ wird nicht mehr besonders hervorgehoben.

Formel (24) gibt rein quantitativ den Barwert der angepassten Dividenden wieder, so dass die Art und Weise der Anpassung noch festzulegen ist. Die Verbindung zwischen dem alten und dem neuen Gewinnplan sei durch die Beziehung

$$\bar{\Omega}_{x:\bar{n}}^*(\tau) = \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau) \cdot [1 + E] \quad (25)$$

hergestellt. Dieser Ausdruck wird durchsichtiger, wenn wir die Gewinnpläne vollständig formulieren:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau) &= \Pi_{x:\bar{n}} \cdot \omega_{x:\bar{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\bar{n}}^{(2)}(\tau) = \\ &= (1 - \beta) \frac{k \cdot \Pi_{x:\bar{n}}}{D_x(\tau)} \sum_{t=t_i}^{n-1} (t - t_i + 1) \cdot D_{x+t}(\tau) + \\ &+ \frac{1}{D_x(\tau)} \sum_{t=t_j}^{n-1} D_{x+t}(\tau) \cdot K_t \cdot A_{x+t:\overline{n-t}}(\tau) \end{aligned}$$

und daraus folgt für

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau) + E \cdot \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau) &= \\ &= (1 - \beta) \frac{(k + E \cdot k) \Pi_{x:\bar{n}}}{D_x(\tau)} \sum_{t=t_i}^{n-1} (t - t_i + 1) \cdot D_{x+t}(\tau) + \\ &+ \frac{1}{D_x(\tau)} \sum_{t=t_j}^{n-1} D_{x+t}(\tau) \cdot [K_t + E \cdot K_t] \cdot A_{x+t:\overline{n-t}}(\tau) = \\ &= \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}^*(\tau) = \\ &= (1 - \beta) \frac{k^* \cdot \Pi_{x:\bar{n}}}{D_x(\tau)} \sum_{t=t_i}^{k-1} (t - t_i + 1) \cdot D_{x+t}(\tau) + \\ &+ \frac{1}{D_x(\tau)} \sum_{t=t_j}^{n-1} D_{x+t}(\tau) \cdot K_t^* \cdot A_{x+t:\overline{n-t}}(\tau). \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, dass dem Ansatz (25) die Bedingung einer gleichmässigen Dividendenanpassung

$$\begin{aligned} k^* &= k(1 + E), \\ K_t^* &= K_t(1 + E) \end{aligned} \quad (26)$$

zugrunde liegt. Das Gleichsetzen von (24) und (25) führt zur Formel der Dividendenanpassung

$$E(s_2, S) = \frac{Q_{x:\overline{n}}}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} = \frac{G - \frac{s_2}{S} [G' + x_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)]}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)}. \quad (27)$$

Greift man hierbei auf die in (23) zum Ausdruck gebrachte Grenzlage zurück, so wird offensichtlich, dass aus

$$\frac{s_2}{S} \leq \frac{G}{G' + x_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)},$$

sowohl

$$Q_{x:\overline{n}} \geq 0,$$

wie

$$E(s_2, S) \geq 0$$

folgt, dass ein Überschreiten eine Reduktion, während ein Unterschreiten eine Erhöhung der Gewinnanteile bedingt.

Der veränderte Gewinnplan (26) verwandelt die Gewinn- und Verlustrechnung des Erstversicherers zwangsläufig in eine Äquivalenzgleichung.

§ 3 Erfolgsrechnung und Dividendenanpassung, wenn die Tarifgrundlagen mit dem tatsächlichen Ablauf übereinstimmen

Die Übereinstimmung zwischen Tarifgrundlagen und tatsächlichem Ablauf wird für die soeben abgeleiteten Ausdrücke in der Weise formal vollzogen, dass die Periodensterbetafel (vgl. I, 1, § 2) $SM(T)$ an Stelle von $SM(\tau)$ gesetzt wird.

Mit

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) = \ddot{a}_{x:\overline{n}}(T) = (\ddot{a}_{x:\overline{n}}),$$

$$\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau) = \ddot{a}'_{x:\overline{n}}(T),$$

$$\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) = \Omega_{x:\overline{n}}$$

nimmt der Saldo der Erfolgsrechnung (21) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
S \cdot Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) &= \\
&= -s_2 (1 + \alpha') \left[\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(T)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}} - 1 \right] - \\
&- s_2 \left[\gamma^{(R)} + \frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(T)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(T)} \gamma' - \gamma \right] \ddot{a}_{x:\overline{n}}(T)
\end{aligned}$$

und daraus

$$Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) = -\frac{s_2}{S} [G' + x_{x:\overline{n}}^{(R)}(T) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(T)].$$

Der Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers verschwindet, und damit nimmt der Saldo der Erfolgsrechnung nur noch negative Werte an. Mit $G = 0$ wird auch die Grenzlage (23) Null, was besagen will, dass jede Rückversicherungsabgabe bereits zum absoluten Verlust und zu einer Reduktion der Gewinnanteile (27) führt.

§ 4 Numerische Untersuchungen

Die vorliegenden numerischen Untersuchungen basieren auf folgenden Grundlagen und Annahmen:

Gemischte Versicherung ($n = m$)

Tarifgrundlagen

Sterblichkeit	SM 39/44
Zinsfuß	$i = 0,03$
Abschlusskosten	$\alpha = 0,05$
β -Verwaltungskosten	$\beta = 0,03$
γ -Verwaltungskosten	$\gamma = 0,002$
Gewinnplan:	Erstmals zu Beginn des 3. Jahres 2% der Tarifprämie und sodann jährlich um weitere 2% steigend

Rückversicherungsgrundlagen

Sterblichkeit	SM 21/30; 33/37; 39/44
Zinsfuß	$i' = 0,025$
Abschlusskosten	$\alpha' = 0,04$
Verwaltungskosten	$\gamma' = 0,0005$

Rückversicherungsmehrkosten

$$x^{(R)} = 0; = 1/2\text{‰}$$

Ablauf

Sterblichkeit

SM (τ)

(Tabelle 2: SM 39/44)

Zinsfuss }
Kosten }

wie Grundlagen

Abschlussjahr

$$x + \tau = 1956$$

Tabelle 2 zeigt den Saldo $Q_{x:\overline{n}}(s_2, S)$ (in ‰₀₀ der Summe), sowie die entsprechende Reduktion der Gewinnanteile $E(s_2, S)$ (in ‰ der Dividenden) unter der Voraussetzung völliger Übereinstimmung von Ablauf und Tarifgrundlagen (vgl. I, 3, § 3).

Tabelle 3 unterrichtet über den Verlauf der Grenzlage (23) in ihrer Abhängigkeit von den Rückversicherungsgrundlagen und Mehrkosten.

Tabellen 4 bis 7 enthalten den Saldo $Q_{x:\overline{n}}(s_2, S)$ (in ‰₀₀ der Summe) und die Dividendenanpassung $E(s_2, S)$ (in ‰ der Gewinnanteile) als Funktionen des Verhältnisses von rückversicherter zu ganzer Summe. Ausserdem werden verschiedene Rückversicherungsgrundlagen berücksichtigt.

Saldo und Dividendenanpassung

Sterblichkeit
SM 39/44
Tarif
Rückvers. SM 21/30
Ablauf SM 39/44

x	n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		$\frac{s_2}{S} = 0$	$\frac{s_2}{S} = 0,1$	$\frac{s_2}{S} = 0,2$	$\frac{s_2}{S} = 0,3$	$\frac{s_2}{S} = 0,4$	$\frac{s_2}{S} = 0,5$	$\frac{s_2}{S} = 0,75$	$\frac{s_2}{S} = 1$	Verlust (8) — (1)
Saldo der Erfolgsrechnung $Q_x : \bar{\pi} (s_2, S)$ in ‰ der Summe										
30	25	0	— 2,86	— 5,71	— 8,57	— 11,42	— 14,28	— 21,41	— 28,55	— 28,55
30	35	0	— 4,17	— 8,34	— 12,51	— 16,68	— 20,86	— 31,28	— 41,71	— 41,71
40	15	0	— 2,34	— 4,67	— 7,01	— 9,34	— 11,68	— 17,51	— 23,35	— 23,35
40	25	0	— 4,12	— 8,24	— 12,37	— 16,49	— 20,61	— 30,92	— 41,22	— 41,22
50	10	0	— 2,25	— 4,49	— 6,74	— 8,98	— 11,23	— 16,84	— 22,45	— 22,45
50	20	0	— 4,55	— 9,10	— 13,65	— 18,20	— 22,75	— 34,13	— 45,50	— 45,50

Dividendenanpassung $E(s_2, S)$ in % der Gewinnanteile

30	25	0	— 2,15	— 4,29	— 6,45	— 8,59	— 10,70	— 16,10	— 21,47	— 21,47
30	35	0	— 2,58	— 5,16	— 7,74	— 10,33	— 12,91	— 19,36	— 25,82	— 25,82
40	15	0	— 2,65	— 5,29	— 7,94	— 10,58	— 13,23	— 19,84	— 26,45	— 26,45
40	25	0	— 3,12	— 6,25	— 9,38	— 12,50	— 15,63	— 23,44	— 31,25	— 31,25
50	10	0	— 3,91	— 7,81	— 11,72	— 15,62	— 19,53	— 29,29	— 39,04	— 39,04
50	20	0	— 4,13	— 8,26	— 12,39	— 16,52	— 20,65	— 30,98	— 41,30	— 41,30

Tabelle 3

		Grenzlage $\frac{s_2}{S}$ (in %)				Tarif		Sterblichkeit	
						Rückvers.		SM 39/44	
						Ablauf		diverse	
								SM (τ)	
		Rückversicherungsgrundlagen							
		SM 21/30	SM 33/37	SM 39/44	SM 21/30	SM 33/37	SM 39/44		
x	n					Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = \frac{1}{2} /_{100}$			
30	25	40,6	53,9	89,2	32,9	41,1	58,9		
30	35	40,9	53,4	83,6	35,0	43,8	62,4		
40	15	38,4	54,0	94,4	32,0	42,1	63,3		
40	25	39,3	53,6	88,3	34,6	45,1	67,5		
50	10	36,0	50,9	97,1	31,5	42,3	70,0		
50	20	39,0	53,0	90,9	35,5	46,8	74,0		

Saldo der Erfolgsrechnung $Q_x : \bar{\pi}(s_x, S)$
(in ‰ der Summe)

Sterblichkeit
SM 39/44
Rückvers.
Ablauf SM 21/30
SM (τ)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
x	n	$\frac{s_2}{S} = 0$	$\frac{s_2}{S} = 0,1$	$\frac{s_2}{S} = 0,2$	$\frac{s_2}{S} = 0,3$	$\frac{s_2}{S} = 0,4$	$\frac{s_2}{S} = 0,5$	$\frac{s_2}{S} = 0,75$	Verlust (8) — (1)
Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = 0$									
30	25	15,1	11,4	7,7	3,9	0,2	— 3,5	— 12,8	— 22,1
30	35	25,9	19,5	13,2	6,9	0,5	— 5,8	— 21,6	— 37,4
40	15	11,5	8,5	5,5	2,5	— 0,5	— 3,5	— 10,9	— 18,3
40	25	24,1	17,9	11,8	5,7	— 0,4	— 6,5	— 21,8	— 37,1
50	10	10,6	7,6	4,7	1,8	— 1,2	— 4,1	— 11,5	— 18,8
50	20	27,3	20,3	13,3	6,3	— 0,7	— 7,7	— 25,2	— 42,7
Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = 1/2^{0/100}$									
30	25	15,1	10,5	5,9	1,3	— 3,3	— 7,9	— 19,4	— 30,8
30	35	25,9	18,5	11,1	3,7	— 3,7	— 11,1	— 29,5	— 48,0
40	15	11,5	7,9	4,3	0,7	— 2,9	— 6,4	— 15,4	— 24,3
40	25	24,1	17,1	10,1	3,2	— 3,8	— 10,7	— 28,1	— 45,5
50	10	10,6	7,2	3,9	0,5	— 2,9	— 6,2	— 14,6	— 23,0
50	20	27,3	19,6	11,9	4,2	— 3,5	— 11,2	— 30,4	— 49,6
30	25	15,1	10,5	5,9	1,3	— 3,3	— 7,9	— 19,4	— 45,9
30	35	25,9	18,5	11,1	3,7	— 3,7	— 11,1	— 29,5	— 73,9
40	15	11,5	7,9	4,3	0,7	— 2,9	— 6,4	— 15,4	— 35,8
40	25	24,1	17,1	10,1	3,2	— 3,8	— 10,7	— 28,1	— 69,6
50	10	10,6	7,2	3,9	0,5	— 2,9	— 6,2	— 14,6	— 33,6
50	20	27,3	19,6	11,9	4,2	— 3,5	— 11,2	— 30,4	— 76,9

Tarif	SM 39/44
Rückvers.	SM 21/30
Ablauf	SM (τ)

x	n	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		$s_{\frac{1}{2}} = 0$	$\frac{s_2}{S} = 0,1$	$\frac{s_2}{S} = 0,2$	$\frac{s_2}{S} = 0,3$	$\frac{s_2}{S} = 0,4$	$\frac{s_2}{S} = 0,5$	$\frac{s_2}{S} = 0,75$	$\frac{s_2}{S} = 1$	Verlust (8) — (1)
Rückversicherungsmehrkosten $\kappa^{(R)} = 0$										
30	25	11,07	8,34	5,61	2,89	0,16	—	2,57	—	9,38
30	35	15,51	11,49	7,76	4,04	0,32	—	3,41	—	12,72
40	15	12,73	9,42	6,10	2,79	—	0,52	—	3,84	—
40	25	17,46	13,03	8,59	4,15	—	0,29	—	4,73	—
50	10	18,05	13,03	8,02	2,99	—	—	2,02	—	7,04
50	20	23,58	17,53	11,47	5,42	—	0,63	—	6,69	—
Rückversicherungsmehrkosten $\kappa^{(R)} = \gamma' = 1/2_{0/00}$										
30	25	11,07	7,71	4,34	0,97	—	2,40	—	5,76	—
30	35	15,21	10,87	6,53	2,18	—	2,16	—	6,50	—
40	15	12,73	8,75	4,78	0,80	—	3,17	—	7,15	—
40	25	17,46	12,42	7,36	2,32	—	2,73	—	7,78	—
50	10	18,05	12,31	6,58	0,84	—	4,91	—	10,65	—
50	20	23,58	16,94	10,30	3,64	—	3,00	—	9,65	—
30	25	11,07	7,71	4,34	0,97	—	2,40	—	5,76	—
30	35	15,21	10,87	6,53	2,18	—	2,16	—	6,50	—
40	15	12,73	8,75	4,78	0,80	—	3,17	—	7,15	—
40	25	17,46	12,42	7,36	2,32	—	2,73	—	7,78	—
50	10	18,05	12,31	6,58	0,84	—	4,91	—	10,65	—
50	20	23,58	16,94	10,30	3,64	—	3,00	—	9,65	—

	Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = \gamma' = 1/2 \cdot 0,100$									
30	11,07	7,71	4,34	0,97	—	2,40	—	5,76	—	—
30	15,21	10,87	6,53	2,18	—	2,16	—	6,50	—	—
40	12,73	8,75	4,78	0,80	—	3,17	—	7,15	—	—
40	17,46	12,42	7,36	2,32	—	2,73	—	7,78	—	—
50	18,05	12,31	6,58	0,84	—	4,91	—	10,65	—	—
20	23,58	16,94	10,30	3,64	—	3,00	—	9,65	—	—

Saldo der Erfolgsrechnung $Q_x: \bar{n}(s_2, S)$
(in ‰ der Summe)

Sterblichkeit
SM 39/44
Tarif
Rückvers. SM 39/44
Ablauf
SM (τ)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
x	n	$\frac{s_2}{S} = 0$	$\frac{s_2}{S} = 0,1$	$\frac{s_2}{S} = 0,2$	$\frac{s_2}{S} = 0,3$	$\frac{s_2}{S} = 0,4$	$\frac{s_2}{S} = 0,5$	$\frac{s_2}{S} = 0,75$	Verlust (8) — (1)

Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = 0$

30	25	15,1	13,4	11,7	10,0	8,3	6,6	2,4	— 16,9
30	35	25,9	22,8	19,7	16,6	13,5	10,4	2,7	— 31,0
40	15	11,5	10,2	9,0	7,8	6,6	5,4	2,4	— 12,2
40	25	24,1	21,3	18,6	15,9	13,2	10,4	3,6	— 27,3
50	10	10,6	9,5	8,4	7,3	6,2	5,1	2,4	— 10,9
50	20	27,3	24,3	21,3	18,3	15,3	12,3	4,8	— 30,0

Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = \gamma' = 1/200$

30	25	15,1	12,5	10,0	7,4	4,9	2,3	— 4,1	— 25,7
30	35	25,9	21,7	17,6	13,4	9,3	5,1	— 5,2	— 41,5
40	15	11,5	9,6	7,8	6,0	4,2	2,4	— 2,1	— 18,2
40	25	24,1	20,5	16,9	13,4	9,8	6,2	— 2,7	— 35,7
50	10	10,6	9,1	7,5	6,0	4,5	3,0	— 0,8	— 15,1
50	20	27,3	23,6	19,9	16,2	12,5	8,8	— 0,4	— 36,9

Sterblichkeit
SM 39/44
Rückvers.
SM 39/44
Ablauf
SM (τ)

Dividendenanpassung E (s_2, S)
(in % der Gewinnanteile)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
x	$\frac{s_2}{S} = 0$	$\frac{s_2}{S} = 0,1$	$\frac{s_2}{S} = 0,2$	$\frac{s_2}{S} = 0,3$	$\frac{s_2}{S} = 0,4$	$\frac{s_2}{S} = 0,5$	$\frac{s_2}{S} = 0,75$	$\frac{s_2}{S} = 1$	Verlust (8) — (1)

Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = 0$

30	11,07	9,83	8,58	7,35	6,10	5,86	1,77	—1,34	—12,4
30	15,21	13,39	11,57	9,75	7,93	6,11	1,56	—2,99	—18,2
40	12,73	11,39	10,03	8,68	7,34	5,99	2,61	—0,76	—13,5
40	17,46	15,49	13,50	11,53	9,55	7,57	2,63	—2,32	—19,8
50	18,05	16,19	14,33	12,48	10,62	8,75	4,10	—0,55	—18,6
50	23,58	20,98	18,39	15,80	13,20	10,61	4,12	—2,37	—25,9

Rückversicherungsmehrkosten $x^{(R)} = \gamma' = 1/2_{/00}$

30	11,07	9,19	7,31	5,43	3,55	1,67	—3,03	—7,73	—18,8
30	15,21	12,77	10,33	7,90	5,46	3,02	—3,08	—9,18	—24,4
40	12,73	10,72	8,71	6,69	4,68	2,67	—2,37	—7,39	—20,1
40	17,46	14,88	12,28	9,70	7,11	4,52	—1,95	—8,42	—25,9
50	18,05	15,47	12,89	10,31	7,73	5,16	—1,30	—7,74	—25,8
50	23,58	20,40	17,21	14,02	10,83	7,65	—0,32	—8,29	—31,9

II. TEIL

Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die Berechnung der Rückversicherungsprämie

Der Übergang vom Schema der Erfolgsrechnung zur Äquivalenzgleichung wurde in einer technischen Anpassung der Gewinnanteile gefunden. Dadurch gelang es, die Einflüsse von Rückversicherungsabgabe und säkularer Änderung der Sterblichkeit zu messen.

Wenn aber die Gewinnausschüttung als versicherte Leistung zu behandeln ist, was im Falle des eingangs vorausgesetzten mechanischen Gewinnplans formal und de facto zutrifft, dann muss jenem Vorgehen ein zweites entgegengestellt werden mit dem Ziel, die auf der Ausgabenseite stehende Rückversicherungsprämie den veränderten Verhältnissen anzugleichen.

Würde es sich lediglich darum handeln, der Forderung nach Gleichheit der Einnahmen und Ausgaben im Rahmen der Erfolgsrechnung des Erstversicherers zu genügen, so müsste dem Rückversicherer an Stelle der bisherigen Prämie, im Barwert

$$s_2 \cdot P'_{x:\overline{n}} \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau) + S \cdot Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) \quad (28)$$

gutgeschrieben werden. Mit diesem Ansatz, der den Saldo $S \cdot Q_{x:\overline{n}}(s_2, S)$ – ob negativ oder positiv – auf den Rückversicherer überträgt, erhalten wir eine Rückversicherungsprämie, welche sich im wesentlichen aus dem minimalen Entgelt (14) und dem Sterblichkeitsgewinn des Erstversicherers zusammensetzt. Der ganze Sterblichkeitsgewinn, welcher aus der Spanne zwischen Tarifgrundlagen und wirklicher Sterblichkeit resultiert, fließt an den Rückversicherer, ein Umstand, der den Widerspruch zum Grundsatz der Schicksalsteilung aufdeckt.

Auch die Zerlegung des Saldos

$$S \cdot Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) = (s_1 + s_2) \cdot Q_{x:\overline{n}}(s_2, S), \quad (29)$$

welche etwa zum Ansatz

$$s_2 \cdot P'_{x:\overline{m}} \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{m}}(\tau) + s_2 \cdot Q_{x:\overline{m}}(s_2, S) \quad (30)$$

führen könnte, berücksichtigt nur scheinbar das erwähnte Prinzip, weil $Q_{x:\overline{m}}$ vorwiegend von den Rückversicherungsgrundlagen abhängt.

Zur Darstellung der Rückversicherungsprämie muss daher stets von der minimalen Prämie

$$P'_{x:\overline{m}}(\tau) = P'_{x:\overline{m}}(\tau) + \frac{\alpha'}{\ddot{a}'_{x:\overline{m}}(\tau)} + \gamma' \quad (14)$$

ausgegangen werden. Es ist dann weitgehend eine Ermessensfrage, nach welchem Schlüssel der gemeinsam erzielte Gewinn verteilt werden soll. Einschränkend ist dabei festzuhalten, dass nur eine feste, summenunabhängige Rückversicherungsprämie für praktische Bedürfnisse in Frage kommen kann.

ERSTES KAPITEL

Feste Rückversicherungsprämie

Die feste Rückversicherungsprämie $P'^*_{x:\overline{m}}$ soll so beschaffen sein, dass im Rahmen eines gegebenen Rückversicherungsvertrags keiner der Beteiligten einen Verlust erleidet:

$$Q_{x:\overline{m}} = G - \frac{S_2}{S} [G' + \kappa^{(R)}_{x:\overline{m}}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}}(\tau)] \geq 0, \quad (31)$$

worin der Sterblichkeitsgewinn

$$G' = [P'^*_{x:\overline{m}} - P'^a_{x:\overline{m}}(\tau)] \ddot{a}'_{x:\overline{m}}(\tau) \geq 0 \quad (32)$$

die minimale Forderung des Rückversicherers repräsentiert. Zusammen mit der Formulierung des Rückversicherungsvertrags gewähren diese beiden Bedingungen der Rückversicherungsprämie einen gewissen, nunmehr zu bestimmenden Spielraum.

§ 1 Minimumbedingung

Den Anfangspunkt des gesuchten Intervalls liefert die Bedingung (32), indem wir den Sterblichkeitsgewinn des Rückversicherers verschwinden lassen:

Aus

$$G' = [P'_{x:\overline{n}} - P'_{x:\overline{n}}(\tau)] \ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau) = 0$$

folgt sofort

$$P'_{x:\overline{n}} = P'_{x:\overline{n}}(\tau) = \frac{A'_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} + \frac{\alpha'}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} + \gamma'. \quad (33)$$

Mit dieser minimalen Prämie lässt sich auf der Rückversicherungsseite das Gleichgewicht zwischen Einnahmen und Ausgaben halten.

Über die Voraussetzung $G' = 0$ liest man aus (22)

$$Q_{x:\overline{n}} = G - \frac{s_2}{S} \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) \quad (34)$$

und aus (27) die Dividendenanpassung

$$E(s_2, S) = \frac{G - \frac{s_2}{S} \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\bar{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} \quad (35)$$

ab.

Ein gegebener Rückversicherungsvertrag legt das Definitionsintervall aller von $s_2 : S$ abhängigen Funktionen fest (vgl. I, 2, § 1-3); es sei bezeichnet mit

$$b \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{1}{\varphi} \quad (36)$$

und hat für (34) und (35) die Abschätzungen

$$G - \frac{1}{\varphi} \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) \leq Q_{x:\overline{n}} \leq G - b \cdot \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau), \quad (37)$$

sowie

$$\frac{G - \frac{1}{\varphi} \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\bar{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} \leq E(s_2, S) \leq \frac{G - b \cdot \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\bar{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} \quad (38)$$

zur Folge.

§ 2 Maximumbedingung

Zur Berechnung der oberen Grenze ziehen wir zunächst die Funktion

$$Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) = G - \frac{s_2}{S} [G' + \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)]$$

heran, die wegen (36) ihren kleinsten Wert mit

$$\frac{s_2}{S} = \frac{1}{\varphi}$$

annimmt. Wird daher

$$G - \frac{1}{\varphi} [G' + \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)] = 0$$

angesetzt und mit Hilfe von

$$G' = [P'_{x:\overline{n}} - P'_{x:\overline{n}}^a(\tau)] \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau),$$

$P'_{x:\overline{n}}$ bestimmt, so hat die Rückversicherungsprämie

$$P'_{x:\overline{n}} = P'_{x:\overline{n}}^a(\tau) + \varphi \frac{G}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} - \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} \quad (39)$$

die Eigenschaft, stets der Ausgangsbedingung (31) zu genügen.

Damit ist der Sterblichkeitsgewinn des Rückversicherers (13) zu schreiben als

$$G' = \varphi \cdot G - \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) \quad (40)$$

und der Saldo des Erstversicherers (22)

$$Q_{x:\overline{n}} = G \left[1 - \frac{s_2}{S} \cdot \varphi \right], \left(b \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{1}{\varphi} \right). \quad (41)$$

Weiter folgt

$$E(s_2, S) = \frac{G}{\Omega_{x:\overline{n}}(\tau)} \left[1 - \frac{s_2}{S} \cdot \varphi \right], \left(b \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{1}{\varphi} \right) \quad (42)$$

die hierbei mögliche Dividendenerhöhung. Wie im Vorausgehenden legt $b \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{1}{\varphi}$ für (41) und (42) die Bereiche

$$0 \leq Q_{x:\overline{n}} \leq G [1 - b \cdot \varphi] \quad (43)$$

und

$$0 \leq E(s_2, S) \leq \frac{G}{\Omega_{x:\overline{n}}(\tau)} [1 - b \cdot \varphi] \quad (44)$$

fest, deren Anfangspunkte den Extremfall der Bedingung (31) repräsentiert, woran die Maximalprämie zu erkennen ist.

§ 3 Das Intervall der festen Rückversicherungsprämie

An sich ist es denkbar, dass das soeben abgesteckte Intervall

$$P'_{x:\overline{n}}(\tau) \leq P'^*_{x:\overline{n}} \leq P'^a_{x:\overline{n}}(\tau) + \varphi \frac{G}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} - \kappa^{(R)}_{x:\overline{n}}(\tau) \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} \quad (45)$$

gar nicht existiert. Darüber kann erst mit dem Nachweis von

$$\varphi \cdot G \geq \kappa^{(R)}_{x:\overline{n}}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) \quad (46)$$

entschieden werden. Sobald $\kappa^{(R)}_{x:\overline{n}}(\tau) > 0$ wird, ist ein formaler Beweis für (46) nicht mehr zu erbringen. Hingegen kann das der Praxis entnommene Zahlenmaterial auf diese Bedingung hin untersucht werden. Das Vorgehen ist einfach:

Der Definition von $\frac{1}{\varphi} = \frac{s_2}{S}$ (Max) folgend, erhalten wir vorerst $\varphi = \frac{S}{s_2}$ (Min), dessen kleinster vorstellbarer Wert 1 ist. Den Sterbetafeln SM (τ) entnehmen wir dann näherungsweise die Abschätzung

$$0,9 \text{ ‰} \leq \frac{G}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)} \leq 2 \text{ ‰}.$$

Ihre untere Schranke wird immer noch grösser sein als jedes in der Praxis vorkommende $\kappa^{(R)} \sim \gamma^{(R)} + \gamma' - \gamma$, sodass die Bedingung (46) stets als erfüllt betrachtet werden darf.

Um $P'^*_{x:\overline{n}}$ innerhalb des Intervalls (45) zu fixieren, ist es zweckmässig, die Rückversicherungsprämie in Abhängigkeit von E, einer minimalen Dividendenerhöhung zu setzen: $P'^*_{x:\overline{n}}(E)$ soll in der Weise bestimmt werden, dass bei voller Ausnützung eines Rückversicherungsvertrages, d. h. mit $\frac{s_2}{S} = \frac{1}{\varphi}$, immer noch die vorgegebene Erhöhung E möglich ist. Den Abschätzungen (38) und (44) entnehmen wir das hierbei in Frage kommende Definitionsintervall für $P'^*_{x:\overline{n}}(E)$

$$0 \leq E \leq \frac{G - \frac{1}{\varphi} \kappa^{(R)}_{x:\overline{n}}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}, \quad (47)$$

dessen Existenz bereits nachgewiesen ist. Unter Verwendung von (27) ist

$$E = E(1, \varphi) = \frac{Q_{x:\overline{n}}(1, \varphi)}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)},$$

woraus

$$Q_{x:\overline{n}}(1, \varphi) = E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) \quad (48)$$

folgt. Ferner nimmt Gleichung (22) in diesem Fall die Gestalt

$$Q_{x:\overline{n}}(1, \varphi) = G - \frac{1}{\varphi} [G' + x_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)] \quad (49)$$

an und mit der Beziehung

$$G' = [P_{x:\overline{n}}'^*(E) - P_{x:\overline{n}}'^a(\tau)] \ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau) \quad (50)$$

finden wir den Übergang zur gesuchten Prämie: Nach der Subtraktion (48) - (49) lassen wir (50) in die dabei entstehende Gleichung eingehen und ermitteln

$$P_{x:\overline{n}}'^*(E) = P_{x:\overline{n}}'^a(\tau) + \frac{\varphi [G - E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)] - x_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)}, \quad (51)$$

$$\left(0 \leq E \leq \frac{G - \frac{1}{\varphi} x_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} \right),$$

die im Intervall (45) liegende und von E abhängige Rückversicherungsprämie. Dass sie in den Extremstellen ihres Bereiches die in § 1 und 2 abgeleiteten Werte tatsächlich annimmt, ist leicht nachzuprüfen.

Gelangt diese Prämie an den Rückversicherer, so wird sein Gewinn mit (13)

$$G' = \varphi [G - E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)] - x_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau), \quad (52)$$

während sich derjenige des Erstversicherers über (22) und (52) auf

$$Q_{x:\overline{n}} = G \left[1 - \frac{s_2}{S} \varphi \right] + \frac{s_2}{S} \varphi \cdot E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) \quad (53)$$

beläuft, welcher die Dividendenerhöhung

$$E(s_2, S) = \frac{G}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} \left[1 - \frac{s_2}{S} \varphi \right] + \frac{s_2}{S} \cdot \varphi \cdot E \quad (54)$$

erlaubt. Weil wiederum $b \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{1}{\varphi}$ ist, folgt

$$E \cdot \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau) \leq Q_{x:\bar{n}} \leq G [1 - b \cdot \varphi] + b \cdot \varphi \cdot E \cdot \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau) \quad (55)$$

und ebenso

$$E \leq E(s_2, S) \leq \frac{G [1 - b \cdot \varphi]}{\bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau)} + b \cdot \varphi \cdot E. \quad (56)$$

Werden die in I, 2, § 1-2 bereitgestellten Beziehungen auf die soeben abgeleiteten Ausdrücke (51) bis (56) angewandt, so resultiert für die beiden gebräuchlichsten Rückversicherungsarten:

A. Quotenrückversicherung

a) Summenverhältnis:

$$\frac{s_2}{S} = b = \text{konstant, sodass}$$

$$\varphi = \frac{1}{b} \text{ wird.}$$

b) Rückversicherungsprämie:

$$P'_{x:\bar{n}}(E) = P'_{x:\bar{n}}(\tau) + \frac{\frac{1}{b} [G - E \cdot \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau)] - \kappa_{x:\bar{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\bar{n}}(\tau)}.$$

c) Rückversicherungsgewinn:

$$G' = \frac{1}{b} [G - E \cdot \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau)] - \kappa_{x:\bar{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\bar{n}}(\tau).$$

d) Erstversicherungsgewinn:

$$Q_{x:\bar{n}}(b, 1) = E \cdot \bar{\Omega}_{x:\bar{n}}(\tau).$$

e) Dividendenerhöhung:

$$E(b, 1) = E.$$

B. Excedentenrückversicherung

a) Summenverhältnis:

$$b = 0 \leq \frac{s_2}{S} \leq \frac{M}{M+1} = \frac{1}{\varphi}.$$

b) Rückversicherungsprämie:

$$P'_{x:\overline{n}}(E) = P'_{x:\overline{n}}(\tau) + \frac{M+1}{M} \frac{[G - E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)] - \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)}.$$

c) Rückversicherungsgewinn:

$$G' = \frac{M+1}{M} [G - E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)] - \kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau).$$

d) Erstversicherungsgewinn:

$$Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) = G \left[1 - \frac{s_2}{S} \cdot \frac{M+1}{M} \right] + \frac{s_2}{S} \cdot \frac{M+1}{M} \cdot E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau).$$

e) Dividendenerhöhung:

$$E(s_2, S) = \frac{G \left[1 - \frac{s_2}{S} \cdot \frac{M+1}{M} \right]}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)} + \frac{s_2}{S} \cdot \frac{M+1}{M} \cdot E.$$

f) Abschätzungen:

$$E \cdot \overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) \leq Q_{x:\overline{n}}(s_2, S) \leq G,$$

$$E \leq E(s_2, S) \leq \frac{G}{\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau)}.$$

ZWEITES KAPITEL

Näherungsweise Erfassung der säkularen Sterblichkeitsabnahme in der Rückversicherungsprämie

In ihrer Abhängigkeit vom Geburtsjahr τ bedingen das Intervall (45) und die Rückversicherungsprämie (51) ein schwerfälliges System von Generationensterbetafeln. Die Erfassung der säkularen Sterblich-

keitsabnahme gestaltet sich jedoch wesentlich einfacher, wenn vorausgesetzt werden kann, dass die extrapolierten Wahrscheinlichkeiten $q(x, x + \tau)$ näherungsweise der Beziehung

$$q(x, x + \tau) \sim q_{x-\Delta\tau}(T) \quad (57)$$

gehörten. Dieser Ansatz entstammt der eingangs erwähnten Arbeit von Rueff (vgl. Fussnote, Einleitung), wobei einzig die Zulässigkeit dieser Annahme (57) auf schweizerisches Zahlenmaterial untersucht werden muss (vgl. III, 2, § 4).

T bedeutet wiederum das Mitteljahr der letzten Periodensterbetafel und $\Delta\tau$ eine vom Alter unabhängige Funktion von τ . Der Vorteil einer derartigen Näherung liegt offensichtlich darin, dass nur eine einzige Tafel benötigt wird, um der Verminderung der Sterblichkeit durch Altersverschiebung Rechnung zu tragen.

Mit (57) ergeben sich noch weitergehende Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) &\sim \ddot{a}_{x-\Delta\tau:\overline{n}}, \\ A_{x:\overline{n}}(\tau) &\sim A_{x-\Delta\tau:\overline{n}}, \\ \Pi_{x:\overline{n}}(\tau) &\sim \Pi_{x-\Delta\tau:\overline{n}}, \\ P'_{x:\overline{n}}(\tau) &\sim P'_{x-\Delta\tau:\overline{n}}, \end{aligned} \quad (58)$$

welche es erlauben, die säkulare Sterblichkeitsabnahme direkt am Tarif zu erfassen.

Die aus dem letzten Kapitel hervorgehende Rückversicherungsprämie (51) enthält nun aber Grössen, welche wohl von der Sterblichkeit, jedoch nicht von τ abhängen. In

$$G = (1 + \alpha) \left[\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} - 1 \right] - \left[\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}} \Omega_{x:\overline{n}} \right]$$

und in

$$\overline{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) = \Pi_{x:\overline{n}} \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau)$$

sind $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$, $\Omega_{x:\overline{n}}$ und $\Pi_{x:\overline{n}}$ vom Geburtsjahr unabhängig. Gleichung (51) wird daher in der Weise umgeformt, dass die τ -abhängigen Werte getrennt von $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$, $\Omega_{x:\overline{n}}$ und $\Pi_{x:\overline{n}}$ in Erscheinung treten:

Die zu Beginn abgeleitete 2. Form des Sterblichkeitsgewinnes (vgl. I, 1, § 2, (9))

$$G = [\Pi_{x:\overline{n}} - \Pi_{x:\overline{n}}(\tau)] \cdot \left[1 - \beta - \frac{\omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau),$$

sowie die tatsächliche Gewinnausschüttung

$$\bar{\Omega}_{x:\overline{n}}(\tau) = \Pi_{x:\overline{n}} \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau) + \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau)$$

werden in (51) eingesetzt. Die Rückversicherungsprämie nimmt dann vorerst die Gestalt

$$\begin{aligned} P'_{x:\overline{n}}(E) = & P'_{x:\overline{n}}(\tau) + \frac{\Phi}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} \left\{ [\Pi_{x:\overline{n}} - \Pi_{x:\overline{n}}(\tau)] \cdot \left[\right. \right. \\ & \cdot \left[1 - \beta - \frac{\omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) - E \cdot \Pi_{x:\overline{n}} \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau) - \\ & \left. \left. - E \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau) \right\} - \chi_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} \end{aligned} \quad (59)$$

an. Wird sodann

$$\frac{\Phi}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} \left[1 - \beta - \frac{(1+E) \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) = Z_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} \left\{ \Pi_{x:\overline{n}}(\tau) \left[1 - \beta - \frac{\omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau) + \right. \\ & \left. + E \cdot \omega_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau) \right\} + \chi_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau) \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}}(\tau)}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}}(\tau)} - P'_{x:\overline{n}}(\tau) = Z_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau) \end{aligned}$$

gesetzt, so folgt

$$P'_{x:\overline{n}} = \Pi_{x:\overline{n}} \cdot Z_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau) - Z_{x:\overline{n}}^{(2)}(\tau), \quad (60a)$$

die Rückversicherungsprämie in einer der Altersverschiebung zugänglichen Form. (Die Abhängigkeit von E ist nicht mehr besonders hervorgehoben.)

Die gefragte Näherung erscheint nunmehr unmittelbar als

$$P'_{x:\overline{n}} \sim \Pi_{x:\overline{n}} \cdot Z_{x-\Delta\tau:\overline{n}}^{(1)} - Z_{x-\Delta\tau:\overline{n}}^{(2)}, \quad (60)$$

deren Hilfszahlen $Z^{(1)}$ und $Z^{(2)}$ nach der letzten Sterbetafel berechnet und dann tabellierbar sind.

Wird in (59) für $E = 0$ gesetzt, dann erhalten wir die obere Grenze des Intervalls (45). Fasst man darin

$$\left[1 - \beta - \frac{\omega_{x:\overline{n}}^{(1)}(\tau)}{d_{x:\overline{n}}(\tau)} \right] \cdot \frac{d_{x:\overline{n}}(\tau)}{d'_{x:\overline{n}}(\tau)}$$

zur Hilfszahl $z_{x:\overline{n}}(\tau)$ zusammen und vernachlässigt $\kappa_{x:\overline{n}}^{(R)}(\tau)$, so erscheint das Intervall der festen Rückversicherungsprämie als

$$P'_{x:\overline{n}}{}^a(\tau) \leq P'_{x:\overline{n}}{}^* \leq P'_{x:\overline{n}}{}^a(\tau) + \varphi [\Pi_{x:\overline{n}} - \Pi_{x:\overline{n}}(\tau)] \cdot z_{x:\overline{n}}(\tau)$$

und angenähert

$$P'_{x-\Delta\tau:\overline{n}}{}^a \leq P'_{x:\overline{n}}{}^* \leq P'_{x-\Delta\tau:\overline{n}}{}^a + \varphi [\Pi_{x:\overline{n}} - \Pi_{x-\Delta\tau:\overline{n}}] \cdot z_{x-\Delta\tau:\overline{n}} \quad (61)$$

Unabhängig vom Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe hat die in diesem Intervall liegende Rückversicherungsprämie stets die zu Beginn geforderte Eigenschaft, keinem der Beteiligten einen Verlust zu erbringen. Mit der Formel (60) kann diese Prämie als Funktion einer minimalen Dividendenerhöhung innerhalb des Bereiches (61) fixiert werden. Beide Ausdrücke erlauben es, die säkulare Sterblichkeitsabnahme durch Altersverschiebung an tarifierten und tabellierten Grössen zu erfassen, während $\frac{1}{\varphi} = \frac{s_2}{S}(\text{Max})$ den Rückversicherungsvertrag charakterisiert.

DRITTES KAPITEL

Numerische Auswertungen

Tabelle 8 steckt die Intervalle der festen Rückversicherungsprämie (45) für einige Kombinationen ab. Den Berechnungen sind die in I, 3, § 4 zusammengestellten Voraussetzungen zu Grunde gelegt. Vergleichshalber sind die Rückversicherungsprämien bei der Verwendung von SM 21/30, SM 33/37 und SM 39/44 aufgeführt. Ausserdem wird die Abhängigkeit der oberen Intervallgrenze vom Rückversicherungsvertrag gezeigt, wobei

$$\frac{s_2}{S}(\text{Max}) = \frac{1}{\varphi} = b$$

einen Quoten- und

$$\frac{s_g}{S}(\text{Max}) = \frac{1}{\varphi} = \frac{M}{M+1}$$

einen Excedentenrückversicherungsvertrag charakterisieren.

In Tabelle 9 sind die Intervalle der Dividendenanpassung (38) bei Rückversicherung zur Minimalprämie (33) dargestellt, sowie diejenigen (44) bei Zession der Maximalprämie (39). Die in Tabelle 8 errechneten Prämien sind der Tabelle 9 zu Grunde gelegt.

Tabelle 8

Intervall der festen Rückversicherungsprämie

x	n	$P'_{x:\overline{n}}(\tau)$	$P'_{x:\overline{n}}$	$P'_{x:\overline{n}}$	$P'_{x:\overline{n}}$	$\chi^{(R)} = 0,0005 \quad \chi^{(R)} = 0,0005 \quad \chi^{(R)} = 0,0005 \quad \chi^{(R)} = 0,0005$			
						$P'_{x:\overline{n}}^{*} \text{Max}$	$P'_{x:\overline{n}}^{*} \text{Max}$	$P'_{x:\overline{n}}^{*} \text{Max}$	$P'_{x:\overline{n}}^{*} \text{Max}$
		SM 21/30, 2 1/2 %	SM 33/37, 2 1/2 %	SM 39/44, 2 1/2 %	$\frac{1}{\varphi} = \frac{3}{4}$	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{10}$
30	25	0,03'281	0,03'484	0,03'373	0,03'343	0,03'357	0,03'398	0,04'057	
30	30	2'653	2'894	2'766	2'736	2'752	2'801	3'580	
30	35	2'232	2'513	2'369	2'338	2'358	2'415	3'334	
40	15	6'053	6'295	6'152	6'128	6'144	6'190	6'934	
40	20	4'424	4'717	4'548	4'527	4'546	4'603	5'509	
40	25	3'496	3'842	3'650	3'630	3'653	3'721	4'809	
50	10	9'708	10'050	9'835	9'823	9'843	9'905	10'887	
50	15	6'446	6'860	6'611	6'605	6'630	6'708	7'950	
50	20	4'921	5'413	5'132	5'128	5'160	5'256	6'789	

Intervalle der Dividendenanpassung
(E in % der Gewinnanteile)

Rückversicherungs-
Mehrkosten
 $\kappa^{(8)} = \gamma' = 1/2 \text{ ‰}$

$$b = 0; \frac{s_2}{S} (\text{Max}) = 3/4 \quad b = 0; \frac{s_2}{S} (\text{Max}) = 2/3 \quad b = 0; \frac{s_2}{S} (\text{Max}) = 1/2 \quad b = \frac{s_2}{S} = \text{konst.} = 1/10$$

x	n	E _{Min}	E _{Max}	E _{Min}	E _{Max}	E _{Min}	E _{Max}	E _{Min}	E _{Max}
30	25	6,28	11,07	6,81	11,07	7,87	11,07	10,43	10,43
30	35	10,57	15,21	11,09	15,21	12,12	15,21	14,49	14,49
40	15	7,75	12,73	8,31	12,73	9,41	12,73	12,06	12,06
40	25	12,88	17,46	13,39	17,46	14,41	17,46	16,85	16,85
50	10	12,65	18,05	13,25	18,05	14,44	18,05	17,33	17,33
50	20	19,15	23,58	19,64	23,58	20,62	23,58	23,00	23,00

Bei Rückversicherung zur Minimalprämie

Bei Rückversicherung zur Maximalprämie

30	25	0	11,07	0	11,07	0	0
30	35	0	15,21	0	15,21	0	0
40	15	0	12,73	0	12,73	0	0
40	25	0	17,46	0	17,46	0	0
50	10	0	18,05	0	18,05	0	0
50	20	0	23,58	0	23,58	0	0

III. TEIL

Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten

Der Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen verlangt eine Extrapolation der Sterbewahrscheinlichkeiten. Aus der grossen Zahl der hierbei zur Verfügung stehenden Verfahren wurde einer von Rueff¹⁾ entwickelten, besonders einfachen Methode der Vorzug gegeben.

Das Verfahren geht von der Annahme eines linearen Verlaufs

$$\log q_{x_i}(t_k)$$

als Funktion der Mitteljahre t_k ab. Rechtfertigt das im Rahmen der verschiedenen Sterbetafeln vorliegende Zahlenmaterial die beschriebene Voraussetzung, so ist daraus eine Extrapolation grundsätzlich möglich.

ERSTES KAPITEL

Extrapolationsverfahren

Zur Herleitung der Extrapolationsformel dehnt Rueff die soeben angedeutete Eigenschaft

$$\begin{aligned} \log q_{x_i}(t_k) &\sim F(x_i) \cdot t_k + B(x_i) \\ (k = 1, 2, \dots, n-1; t_n = T) \end{aligned} \quad (62a)$$

auch auf $t > T$ aus und erhält den Ansatz

$$\log q(x_i, t) = F(x_i) \cdot t + B(x_i). \quad (62)$$

¹⁾ Vgl. Fussnote, Einleitung.

Abweichend von der bisherigen Bezeichnungsweise kennzeichnet $q(x_i, t)$ die analytisch erzeugte, extrapolierte, einjährige Sterbewahrscheinlichkeit des x -Jährigen im Kalenderjahr t . Für ein bestimmtes x soll die Gerade

$$F(x_i) \cdot t + B(x_i)$$

1. durch das letzte vorliegende $\log q_{x_i}(T)$ gehen und
2. die übrigen Werte $\log q_{x_i}(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate approximieren.

Die erste Forderung

$$\log q(x_i, T) = \log q_{x_i}(T)$$

liefert eine Transformation des Koordinatennullpunktes, sodass nunmehr eine Gerade

$$\log q(x_i, t) - \log q_{x_i}(T) = F(x_i) \cdot [t - T]$$

zu ermitteln ist. Die zweite Forderung vereinfacht sich dann zu

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{ [\log q_{x_i}(t_k) - \log q_{x_i}(T)] - F(x_i) \cdot [t_k - T] \}^2 = \text{Min.},$$

woraus nach der Differentiation nach $F(x_i)$

$$F(x_i) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} [\log q_{x_i}(t_k) - \log q_{x_i}(T)] \cdot (t_k - T)}{\sum_{k=1}^{n-1} (t_k - T)^2} \quad (63)$$

folgt. Die Extrapolationsgerade ist damit bestimmt; wir schreiben sie in der Form

$$\log q(x_i, t) = \log q_{x_i}(T) + (t - T) \cdot F(x_i), \quad (t > T). \quad (64)$$

In ihr repräsentiert $F(x_i)$ ein Mass für die säkulare Sterblichkeitsabnahme, die mittlere zeitliche Änderung

$$\frac{\partial \log q(x_i, t)}{\partial t}.$$

Festzulegen ist für die praktische Anwendung das Intervall $m \leq x_i \leq M$, innerhalb dessen Grenzen ein näherungsweise linearer Verlauf der $\log q_{x_i}(t_k)$ gewährleistet ist.

ZWEITES KAPITEL

Anwendung des Verfahrens auf schweizerisches Zahlenmaterial

§ 1 Lineare Abhängigkeit von $\log q_{x_i}(t_k)$

Die lineare Abhängigkeit von $\log q_{x_i}(t_k)$ wurde an schweizerischem Zahlenmaterial

SM	t_k
1881-88	$t_1 = 1885,0$
1889-00	$t_2 = 1895,0$
1901-10	$t_3 = 1906,0$
1910-11	$t_4 = 1911,0$
1920-21	$t_5 = 1921,0$
1921-30	$t_6 = 1926,0$
1929-32	$t_7 = 1931,0$
1933-37	$t_8 = 1935,5$
1931-41	$t_9 = 1936,5$
1939-44	$T = t_{10} = 1942,0$

für alle durch 5 teilbaren Alter von 25-75 auf graphischem Wege geprüft. Dabei zeigte sich, dass die Werte der Tafeln t_3 bis T im untersuchten Altersbereich $25 \leq x_i \leq 75$ annähernd linearen Verlauf in t_k aufweisen, während diejenigen der ersten beiden Tafeln etwas tiefer liegen. Es blieb daher dem persönlichen Ermessen anheimgestellt, ob jene beiden Tafeln zur Bestimmung der Extrapolationsgeraden heranzuziehen waren oder nicht. Mit Rücksicht auf eine Anwendung im Rahmen der „Gemischten Versicherung“, einer Versicherungsart mit vorwiegendem Todesfallcharakter, musste eher eine obere Grenze der extrapolierten Sterbewahrscheinlichkeiten angestrebt werden. In diesem Sinne wirkte sich die Verwendung von SM 1881-88 und SM 1889-00 aus, indem ihre verhältnismässig kleinen Werte die Extrapolationsgerade weniger steil werden liessen.

§ 2 Bestimmung der Extrapolationsgeraden

Mit Hilfe der Gleichung (63) entstand die nachfolgende Tabelle. Sie enthält für alle durch 5 teilbaren Alter in $30 \leq x_i \leq 70$ die Neigungen der Extrapolationsgeraden, wenn die Tafeln

- a) $t_1 = 1906, \dots, T = 1939,5$
- b) $t_1 = 1906, \dots, T = 1936,5$
- c) $t_1 = 1906, \dots, T = 1942,0$
- d) $t_1 = 1885, \dots, T = 1942,0$

zur Berechnung beigezogen werden.

Wie bereits erwähnt, wurde der Variante d) der Vorzug gegeben

Tabelle 10

Neigung der Extrapolationsgeraden;
säkulare Sterblichkeitsabnahme

$F(x_1)$ in ‰

	$F(x_1)$	$F(x_1)$	$F(x_1)$	$F(x_1)$
x_1	$t_1 = 1906,0$ $T = 1935,5$	$t_1 = 1906,0$ $T = 1936,5$	$t_1 = 1906,0$ $T = 1942,0$	$t_1 = 1885,0$ $T = 1942,0$
30	— 8,53	— 9,32	— 9,51	— 8,61
35	— 8,62	— 9,16	— 10,89	— 9,67
40	— 8,88	— 9,32	— 10,79	— 9,31
45	— 7,68	— 7,97	— 8,66	— 7,53
50	— 6,38	— 6,68	— 7,78	— 6,46
55	— 5,30	— 5,28	— 6,64	— 5,25
60	— 4,60	— 4,64	— 5,31	— 4,24
65	— 3,92	— 3,67	— 4,49	— 3,58
70	— 3,67	— 3,42	— 3,52	— 2,86

§ 3 Aufbau der Generationensterbetafeln

Da wir in der vorliegenden Arbeit Versicherungen mit den Beginnaltern 30, 40 und 50 im Abschlussjahr 1956 untersuchen, musste ein System von Generationensterbetafeln für $\tau = 1926, 1916$ und 1906 aufgebaut werden.

In

$$\log q(x, x + \tau) = \log q_x(T) + F(x) \cdot [x + \tau - T]$$

durchlaufen daher

- a) $\log q_x(T)$ $x = 30, 31, \dots, 69; T = 1942$
- b) $F(x)$ $x = 30, 31, \dots, 69$
- c) $x + \tau - T$ $= 12, 13, \dots, 53$

Diese Generationensterbetafeln sind in Tabelle 11 dargestellt. Ausserdem wurden die entsprechende Überlebensordnung $l(x, x + \tau)$, sowie die Kommutationszahlen $D(x, x + \tau)$ für $i = 0,03; 0,025$ errechnet.

Tabelle 11

Generationensterbetafel

$$\tau = 1906$$

x	q (x, x + τ)	l (x, x + τ)	D (x, x + τ)	D' (x, x + τ)	$\Delta\tau$
			i = 0,03	i' = 0,025	
50	0,00'797	92'467	21'092	26'903	2,623
51	859	91'730	20'315	26'037	2,647
52	927	90'942	19'554	25'184	2,692
53	1'003	90'099	18'808	24'342	2,741
54	1'090	89'195	18'077	23'510	2,739
55	1'190	88'223	17'360	22'687	2,680
56	1'302	87'173	16'653	21'870	2,607
57	1'422	86'038	15'958	21'059	2,594
58	1'550	84'815	15'273	20'253	2,631
59	1'692	83'500	14'598	19'453	2,654
60	1'853	82'087	13'955	18'657	2,633
61	2'024	80'566	13'277	17'865	2,639
62	2'205	78'935	12'629	17'076	2,683
63	2'392	77'194	11'991	16'292	2,770
64	2'602	75'348	11'363	15'515	2,796
65	2'843	73'387	10'745	14'742	2,746
66	3'120	71'301	10'136	13'974	2,653
67	3'417	69'076	9'533	13'208	2,622
68	3'751	66'718	8'940	12'446	2,592
69	4'117	64'215	8'354	11'687	2,557
70	4'540	61'571			<u>2,460</u>
					<u>2,644</u>

Generationensterbetafel

$\tau = 1916$

x	$q(x, x + \tau)$	$l(x, x + \tau)$	$D(x, x + \tau)$ $i = 0,03$	$D'(x, x + \tau)$ $i' = 0,025$	$\Delta\tau$
40	0,00'320	97'443	29'872	36'291	6,222
41	343	97'131	28'909	35'292	5,308
42	371	96'798	27'971	34'313	4,500
43	404	96'439	27'055	33'352	3,933
44	430	96'049	26'161	32'407	4,067
45	475	95'636	25'290	31'481	3,833
46	517	95'182	24'437	30'567	3,854
47	554	94'690	23'602	29'668	4,083
48	593	94'165	22'788	28'784	4,167
49	635	93'607	21'993	27'915	4,444
50	686	93'013	21'217	27'061	4,582
51	743	92'375	20'458	26'220	4,554
52	807	91'689	19'714	25'391	4,459
53	878	90'949	18'986	24'572	4,368
54	960	90'150	18'271	23'762	4,269
55	1'055	89'285	17'569	22'960	4,129
56	1'161	88'343	16'877	22'163	3,970
57	1'273	87'317	16'195	21'372	3,866
58	1'394	86'205	15'523	20'585	3,813
59	1'527	85'003	14'861	19'803	3,794
60	1'681	83'705	14'208	19'025	3,725
61	1'843	82'298	13'562	18'249	3,693
62	2'016	80'781	12'924	17'476	3,683
63	2'193	79'152	12'295	16'705	3,743
64	2'390	77'416	11'675	15'941	3,779
65	2'618	75'566	11'064	15'180	3,724
66	2'883	73'588	10'461	14'422	3,582
67	3'168	71'466	9'863	13'665	3,478
68	3'490	69'202	9'272	12'909	3,388
69	3'842	66'787	8'688	12'155	3,327
70	4'250	64'221			3,196
					<u>4,167</u>

Generationensterbetafel

$\tau = 1926$

x	q (x, x + τ)	l (x, x + τ)	. D (x, x + τ)	D' (x, x + τ)	$\Delta\tau$
			i = 0,03	i' = 0,025	
30	0,00'227	100'000	41'199	47'674	12,241
31	221	99'773	39'908	46'406	13,448
32	218	99'553	38'660	45'174	14,552
33	216	99'336	37'452	43'976	15,621
34	216	99'121	36'283	42'811	16,621
35	219	98'907	35'150	41'677	17'517
36	222	98'690	34'051	40'571	18,414
37	227	98'471	32'986	39'493	19,241
38	233	98'247	31'952	38'443	20,034
39	243	98'018	30'950	37'417	20,679
40	258	97'780	29'975	36'416	21,143
41	279	97'528	29'027	35'437	21,190
42	304	97'256	28'103	34'476	10,400
43	334	96'960	27'201	33'533	8,000
44	357	96'636	26'321	32'605	7,333
45	399	96'291	25'463	31'696	6,136
46	438	95'907	24'623	30'800	5,833
47	472	95'487	23'801	29'917	5,905
48	507	95'036	22'999	29'050	6,071
49	545	94'554	22'216	28'198	6,271
50	592	94'039	21'451	27'360	6,190
51	644	93'482	20'703	26'534	6,302
52	703	92'880	19'971	25'721	6,273
53	769	92'227	19'253	24'917	6,089
54	845	91'518	18'548	24'122	5,853
55	935	90'745	17'856	23'335	5,590
56	1'035	89'897	17'174	22'553	5,365
57	1'140	88'967	16'501	21'776	5,196
58	1'253	87'953	15'838	21'002	5,050
59	1'379	86'851	15'184	20'233	4,930
60	1'525	85'653	14'538	19'468	4,809
61	1'679	84'347	13'900	18'703	4,739
62	1'844	82'931	13'268	17'941	4,687

Generationensterbetafel

$$\tau = 1926$$

x	q (x, x + τ)	l (x, x + τ)	D (x, x + τ)	D' (x, x + τ)	$\Delta\tau$
			i = 0,03	i' = 0,025	
63	0,02'010	81'402	12'644	17'180	4,716
64	2'196	79'766	12'029	16'424	4,728
65	2'411	78'014	11'422	15'672	4,681
66	2'663	76'133	10'822	14'921	4,524
67	2'937	74'106	10'227	14'170	4,361
68	3'247	71'930	9'638	13'418	4,190
69	3'584	69'594	9'053	12'666	4,087
70	3'979	67'100			<u>3,932</u>
					<u>5,595</u>

§ 4 Die $\Delta\tau$ -Verschiebung

Im 3. Kapitel des II. Teiles wurde bereits von der Beziehung

$$q(x, x + \tau) \sim q_{x-\Delta\tau}(T)$$

Gebrauch gemacht. Sie musste auf ihre Anwendbarkeit im Rahmen des schweizerischen Zahlenmaterials hin untersucht werden. Aus einem System von 23 Generationensterbetafeln ($\tau = 1904$ bis $\tau = 1926$) wurden alle Werte $q(x, x + \tau)$ mit den Sterbewahrscheinlichkeiten $q_x(T)$ aus SM 39/44 verglichen. Die Altersverschiebung $\Delta\tau$ erschien dann unmittelbar mit Hilfe linearer Interpolation zwischen den einzelnen Altern aus der obenstehenden Beziehung. Es zeigte sich dabei, dass $\Delta\tau$ nicht in bestimmter Weise von x abhängt, sodass $\Delta\tau$ für ein gegebenes Geburtsjahr durch einfache Mittelbildung errechnet werden konnte (Mittelbildung und Anwendungsbereich beschränken sich auf $x - \Delta\tau \geq 25$).

In Tabelle 12 sind die Grenzen der Altersverschiebungen $\Delta\tau$ und ihre arithmetischen Mittel für $\tau = 1904$ bis $\tau = 1926$ aufgeführt.

Tabelle 13 vermittelt ein Bild von der Güte der $\Delta\tau$ -Verschiebung an 3 kurzen Versuchsreihen von Rentenbarwerten und Prämien. Die Voraussetzungen zur Berechnung der Maximalprämie entsprechen denjenigen in Tabelle 8 für $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{3}$. Es ist zu beachten, dass die verhältnismässig grossen Fehler bei $x = 30$ durch die Nichteinhaltung der Bedingung $x - \Delta\tau \geq 25$ zustandekommen.

Tabelle 12

 $\Delta\tau$ -Verschiebung

τ	Grenzen	Mittel
1904	2,23 – 2,60	2,416
5	2,39 – 2,70	2,525
6	2,46 – 2,80	2,644
7	2,38 – 2,91	2,754
8	2,26 – 3,02	2,853
9	2,46 – 3,22	2,965
10	2,65 – 3,41	3,084
11	2,67 – 3,63	3,196
12	2,94 – 3,80	3,335
13	2,67 – 3,86	3,311
14	3,04 – 5,00	3,701
15	3,12 – 6,57	3,952
16	3,20 – 7,80	4,167
17	3,27 – 7,00	4,237
18	3,35 – 7,86	4,431
19	3,45 – 9,50	4,684
20	3,50 – 7,78	4,666
21	3,57 – 8,57	4,852
22	3,66 – 9,60	5,042
23	3,72 – 8,00	5,059
24	3,79 – 8,67	5,236
25	3,86 – 9,43	5,401
26	3,93 – 10,40	5,595

Tabelle 13

Güte der $\Delta\tau$ -Verschiebung

x	n	Rentenbarwert		Nettoprämie		Maximalprämie	
		$\dot{d}_x : \bar{n}(\tau)$ SM (τ) , 3 % $x + \tau = 1956$	$\dot{d}_{x-\Delta\tau} : \bar{n}$ SM 39/44, 3 %	$P_x : \bar{n}(\tau)$ SM (τ) , 3 % $x + \tau = 1956$	$P_{x-\Delta\tau} : \bar{n}$ SM 39/44, 3 %	$P'_x : \bar{n}(\tau)$ Max SM (τ) , 3 % $x + \tau = 1956$	$P'_{x-\Delta\tau} : \bar{n}$ Max SM 39/44, 3 %
30	25	17,434	17,307	0,02'823	0,02'865	0,03'357	0,03'340
30	35	21,049	20,881	1'838	1'876	2'357	2'341
40	15	11,942	11,937	5'461	5'464	6'144	6'141
40	25	16,819	16,814	3'033	3'034	3'652	3'650
50	10	8,424	8,424	8'958	8'959	9'844	9'843
50	20	13,682	13,676	4'396	4'397	5'160	5'158

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Aufbau der Bestimmungsgleichung der Tarifprämie nach dem in der Praxis üblichen Vorgehen werden zwei, die Äquivalenz störende Einflüsse nicht berücksichtigt:

1. die säkulare Änderung der Sterblichkeit und
2. die Rückversicherungsabgabe zu Prämien, denen in Bezug auf die Sterblichkeit vorsichtig gewählte Annahmen zu Grunde gelegt sind.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wurden diese Störungen gemessen. Zunächst untersuchten wir im ersten Kapitel die Sterblichkeitsgewinne des Erstversicherers getrennt von denjenigen des Rückversicherers. Unter gewissen, im III. Teil beschriebenen Annahmen über den Ablauf der Sterblichkeit, sowie unter den in der heutigen Praxis geltenden Voraussetzungen zeigte sich, dass auf gleiche Summen bezogen, der Sterblichkeitsgewinn des Rückversicherers erheblich grösser ist als derjenige des Erstversicherers. Sterblichkeitsgewinne von 20 bis 70‰ der rückversicherten Teilsumme stehen dabei solchen von 10 bis 30‰ der ganzen Versicherungssumme gegenüber.

Anschliessend war die Verbindung herzustellen zwischen Erst- und Rückversicherer. Im zweiten Kapitel wurden daher die wesentlichsten Rückversicherungsvertragsformen im Hinblick auf das Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe untersucht. Die Grenzen des Intervalls, in denen sich jenes Verhältnis bewegt, sind leicht aus den vertraglichen Vereinbarungen zu ermitteln.

Im dritten Kapitel konnte nunmehr die Gewinn- und Verlustrechnung des Erstversicherers bei teilweiser Rückversicherungsabgabe aufgebaut und ihr Saldo errechnet werden. Dieser vom Verhältnis zwischen rückversicherter und ganzer Summe abhängige Saldo schwankt in den extremsten Fällen zwischen Gewinnen von 30‰ und

Verlusten bis zu 40‰ der Versicherungssumme. Für eine bestimmte Grenzlage verschwindet der Saldo; Äquivalenz liegt bei Rückversicherungsabgaben von 30 bis 50 % der Versicherungssumme vor. Die detaillierten Messungen gestalteten sich in der Weise, dass der Saldo zum Gegenstand einer Erhöhung oder Reduktion der Gewinnanteile gemacht wurde.

Als äusserste Werte dieser Dividendenanpassung stehen Erhöhungen von 24 % der Gewinnanteile und Reduktionen bis 43 % einander gegenüber.

Wir können festhalten, dass die eingangs skizzierten Störungen überraschend stark auf die Erfolgsrechnung des Erstversicherers wirken.

Im zweiten Teil wurden an Stelle der Dividenden die Rückversicherungsprämien den veränderten Verhältnissen angepasst. Wir haben im ersten Kapitel ein Intervall konstruiert, innerhalb dessen Schranken jede Rückversicherungsprämie die Eigenschaft aufweist, keinem der an einem Rückversicherungsvertrag Beteiligten einen Verlust zu erbringen. Schliesslich wurden die hierbei gezogenen Grenzen im nachfolgenden zweiten Kapitel in einer der Altersverschiebung zugänglichen Form dargestellt.

Im dritten Teil wurden Annahmen über den tatsächlichen Verlauf der Sterblichkeit getroffen. Das erste Kapitel ist dem von Rueff entwickelten Extrapolationsverfahren gewidmet. Mit geringfügigen Modifikationen wurde diese Methode im zweiten Kapitel auf schweizerisches Zahlenmaterial angewendet und ein System von Generationensterbetafeln aufgebaut. Diese Tafeln bildeten die Grundlagen für die aus dem ersten und zweiten Teil hervorgehenden numerischen Untersuchungen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. *E. Zwinggi*: Versicherungsmathematik, Basel 1945.
2. *A. Perger*: Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, Berlin 1923.
3. *F. Rueff*: Ableitung von Sterbetafeln für die Rentenversicherung und sonstige Versicherungen mit Erlebensfallcharakter, Würzburg 1955.
4. *H. Ruck*: Die Gewinnbeteiligung bei hohen Versicherungssummen, Sa. 32, 1949.
5. *G. Cruciger*: Die Praxis der Rückversicherung, München 1926.

CURRICULUM VITAE

Am 3. März 1924 wurde ich, René Eduard Beneš von Schaffhausen, daselbst als Sohn des Eduard Beneš und der Emma Beneš, geb. Steiger, Postverwalter in Stein am Rhein, geboren. Die Schulen besuchte ich in Schaffhausen, wo ich im Sommer 1944 an der Kantonschule die Maturitätsprüfung vom Typus C bestand.

Ein Jahr später liess ich mich an der philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Genf immatrikulieren, um zunächst Mathematik und Experimentalphysik zu studieren. Nach zwei Semestern setzte ich meinen Studiengang, ergänzt durch Astronomie und theoretische Physik, an der Universität Zürich fort. Im Sommersemester 1951 immatrikulierte ich mich an der Universität Basel, wo ich mich dem Studium der Versicherungslehre zuwandte.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen und Übungen bei folgenden Dozenten: W. Becker (Basel), H. Bömmel (Zürich), P. Buchner (Basel), P. Finsler (Zürich), R. Fueter (Zürich), M. Gürtler (Basel), W. Heitler (Zürich), P. Huber (Basel), E. Meyer (Zürich), R. Nevanlinna (Zürich), A. Ostrowski (Basel), J. Ruffet (Genf), A. Speiser (Basel), M. Waldmeier (Zürich), R. Wavre (Genf), J. Weigle (Genf), E. Zwinggi (Basel).

Die Dissertation entstand unter der Leitung von Herrn Professor Ernst Zwinggi.

